# Corrigé du DS n°7

le 30/01/2026
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

## Exercice 1 :

1. (a) Pour tout réel $t$ appartenant a $[0;1]$ on a $\boxed{: 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{1+t-1}{1+t} = \frac{t}{1+t}}$.

(b) $\underline{I_1} = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\, dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}\, dt = [t - \ln(1+t)]_0^1 = 1 - \ln(2) - 0 + \ln(1) = \underline{1 - \ln(2)}$.

(c) Pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t}\, dt = \int_0^1 \frac{t^n(1+t)}{1+t}\, dt\ .$$

D'où

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 t^n\, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \underline{\frac{1}{n+1}}\ .$$

(d) On en déduit $I_2 = -\, I_1 + \frac{1}{2} = \ln(2) - 1 + \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{2}$ ;
et $I_3 = -\, I_2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \ln(2) + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \ln(2)$.

2. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + k \times I_1 + \int_0^{+\infty} 0 dt = k \times I_1$.
Il faut $k \times I_1 = 1$ ; et donc $k = \frac{1}{1 - \ln(2)}$.
De plus $f$ est alors continue sur $\mathbb{R}$ (sauf en 1) et à valeurs positives (car $\ln(2) < \ln(e) = 1$ et donc $1 - \ln(2) > 0$). Donc $f$ est bien une densité de probabilité.

3. (a) $\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0 \text{ lorsque } x < 0}$
et lorsque $x > 1$ $\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + k \times I_1 + \int_0^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1}$ .

(b) Pour tout réel $x \in [0;1]$, d'après ce qui précède, on a

$$F(x) = \int_0^x k \frac{t}{1+t}\, dt = k \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t}\, dt = k\, [t - \ln(1+t)]_0^x = k(x - \ln(1+x))\ .$$

4. (a) $E(X)$ existe car $f$ est continue sur $[0,1]$ et nulle en dehors.
Elle vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)\, dt = 0 + k \times I_2 + 0 = \frac{1}{1 - \ln(2)} \times \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)$.
Donc $\boxed{E(X) = \frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1 - \ln(2)}}$

(b) Pour que $V(X)$ existe, il faut que $E(X^2)$ existe. C'est le cas car $f$ est continue sur $[0,1]$ et nulle en dehors.
On a

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \times f(t)\, dt = 0 + k \times I_3 + 0 = \frac{1}{1 - \ln(2)} \times \left(\frac{5}{6} - \ln(2)\right)\ ;$$

d'où $\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\frac{5}{6} - \ln(2)}{1 - \ln(2)} - \left(\frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1 - \ln(2)}\right)^2}$.

# Exercice 2

## Partie A

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(-t) = f(t)$.
   — Si $t \geq 1$, alors $-t \leq -1$ et dans ce cas
   $$f(-t) = -\frac{-1}{(-t)^3} = \frac{-1}{-t^3} = \frac{1}{t^3} = f(t).$$
   — Si $t \leq -1, -t \geq 1$ et on a
   $$f(-t) = \frac{1}{(-t)^3} = \frac{1}{-t^3} = \frac{-1}{t^3} = f(t).$$
   — Enfin, si $-1 < t < 1$ alors $-1 < -t < 1$ et
   $$f(-t) = 0 = f(t).$$
   Dans tous les cas, on a bien $f(-t) = f(t)$ et $f$ est bien paire.

2. L'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \geq 1$. On a
   $$\begin{aligned}\int_1^A f(t)\mathrm{d}t &= \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^A \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
   Donc l'intégrale converge et vaut 1/2.

3. (a) On utilise le changement de variable $u = -t$, affine et donc licite. Comme dans ce cas $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, il suit (comme $f(-u) = f(u)$ par parité) que
   $$\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = -\int_A^1 f(-u)\mathrm{d}u = \int_1^A f(u)\mathrm{d}u.$$
   Faisant tendre $A$ vers $+\infty$ et utilisant le résultat de la question précédente il suit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut également 1/2.

   (b) On vérifie que $f$ satisfait aux critères d'une densité de probabilité :
   — $f$ est bien positive ou nulle partout sur $\mathbb{R}$ : c'est clair sur $]-1;1[$ où elle est nulle et c'est clair sur $[1;+\infty$ où elle vaut $1/t^3$. Si $t \leq 1$, $t^3 \leq -1$ et donc $-1/t^3 \geq 0$ rendant bien $f$ positive ou nulle partout ;
   — $f$ est continue sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ comme inverse d'une fonction puissance qui ne s'annule pas et elle est naturellement continue sur $]-1;1[$ comme fonction constante. Elle n'est pas continue en $-1$ ni en 1 mais il s'agit d'un nombre fini de points, ne posant donc pas de problème ;
   — Enfin, la nullité de $f$ sur $]-1;1[$ et la convergence des deux intégrales précédentes permet d'affirmer que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$
   Tous les critères sont satisfaits, $f$ est bien une densité de probabilité.

4. (a) Par définition de la fonction de répartition de $X$,
   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t.$$
   Ainsi,

— Si $x \leq -1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{-1}{t^3}\right) \mathrm{d}t \\ &= \lim_{A+\infty} -\int_{-A}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \\ &= \lim_{A+\infty} \left[\frac{1}{2t^2}\right]_{-A}^{x} \\ &= \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

— Si $x \in ]-1;1[$ alors,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + 0 = \frac{1}{2}.$$

— Enfin, si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2x^2}, \end{aligned}$$

et on a bien le résultat attendu.

(b) $X$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\mathrm{d}t$$

converge. Par parité de $f$ (et donc de $t \mapsto |t|f(t)$), et nullité de $f$ sur $]-1:1[$, ceci revient à la convergence de l'intégrale

$$\int_{1}^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

On reconnait une intégrale de Riemann convergente. Donc $X$ admet une espérance. Mais comme $t \mapsto tf(t)$ est impaire, cette espérance est nulle (par le changement de variable $u = -t$, l'intégrale de $tf(t)$ sur $]-\infty;-1]$ est égale à l'opposée de celle sur $[1;+\infty[$). En conclusion,

$$E(X) = 0.$$

(c) $X$ admet une variance si et seulement elle admet un moment d'ordre 2 ce qui, avec les mêmes arguments que ci-dessus, est équivalent à la convergence de l'intégrale

$$\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

qui est cette fois une intégrale de Riemann divergente. Donc $X$ n'admet pas de variance.

5. Soit $Y$ la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

(a) On cherche à exprimer $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x)$. Commençons par observer que $|X| \geq 0$ et que donc $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < 0$. Pour $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) \\ &= P(X \leq x) - P(X < -x) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) \end{aligned}$$

Si $x \in ]-1;1[$, alors $-x \in ]-1,1[$ et donc $F_Y(x)=0$. Si $x \geq 1$, on a $-x \leq -1$ et donc

$$F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} - 1\frac{1}{2(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Au final, on obtient

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}.$$

La fonction de répartition $F_Y$ de $Y$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$ (comme fonction constante d'une part et comme combinaison d'une constante de l'inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas d'autre part) et continue en 1 donc sur $\mathbb{R}$. On peut alors conclure que $Y$ est une v.a à densité.

(b) Une densité de $Y$ s'obtient en dérivant $F_Y$ là où elle est dérivable et en prenant une valeur arbitraire en 1. On a bien

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}.$$

(c) $Y$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_Y(t) \mathrm{d}t$$

converge. Comme $f_Y$ est nulle en dehors de $[1;+\infty[$, il suffit de justifier la convergence et de calculer l'intégrale entre 1 et $+\infty$. Soit $A \geq 1$.

$$\int_1^A t f_Y(t)\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{2\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^A = 2 - \frac{2}{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Donc $Y$ admet une espérance et $E(Y)=2$.

## Partie B

1. Soit $D$ une variable aléatoire prenant les valeurs $-1$ et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire $Y$. Soit $T$ la variable aléatoire définie par $T = DY$.

(a) Si $D=-1$ alors $Z=0$, si $T=1$, alors $Z=1$. Donc $Z(\Omega)=\{0;1\}$. De plus, $P(Z=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$. Il suit que $Z$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. (C'est aussi une loi uniforme sur $\{0;1\}$.) Comme on peut alors écrire $D = 2Z-1$, la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance donnent

$$E(D) = 2E(Z) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0, \qquad V(D) = 2^2 V(Z) = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

(b) Comme $D$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes admettant chacune une espérance, leur produit admet également une espérance, égale au produit des espérances.

$$E(T) = E(D) \times E(Y) = 0.$$

(c) D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(D=-1),(D-1)\}$, on a

$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= P(T \leq x \cap D = -1) + P(T \leq x \cap D = 1) = P(-Y \leq x \cap D = -1) + P(Y \leq x \cap D = 1) \\ &= P(Y \geq -x)P(D=-1) + P(Y \leq x)P(D=1) \quad (\text{ par indépendante de } D \text{ et } Y) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \geq -x) + \frac{1}{2}P(Y \leq x). \end{aligned}$$

(d) La question précédente donne donc

$$F_T(x) = P(T \leq x) = \frac{1}{2}\left(F_Y(x) + 1 - F_Y(-x)\right).$$

En injectant la formule pour la fonction de répartition obtenue dans la partie précédente, on trouve

$$F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2}, & \text{si } x \leq -1 \\ 0, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

*On remarque que $T$ suit la même loi que $X$.*

2. Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$ et $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

   (a) On rappelle que, d'après le cours

   $$F_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

   (b) Par définition, $V > 00$ donc $F_V(x) = 0$ si $x \leq 0$. Pour $x > 00$, on a

   $$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right) \\ &= P\left(1 - U \geq \frac{1}{x^2}\right) = P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

   Or,

   $$x \leq 1 \iff 1 - \frac{1}{x^2} \leq 0 \qquad \text{et} \qquad x > 1 \iff 1 - \frac{1}{x^2} \in ]0;1[.$$

   Ainsi,

   $$F_V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   et on reconnait la fonction de répartition de $Y$. Ainsi, $V$ et $Y$ suivent la même loi.

3. (a)

```python
def D(n):
    l = []
    for i in range(n):
        tir = rd.random()
        if tir  < 0.5:
            l.append(1)
        else:
            l.append(-1)
    return l
```

   (b) Le programme proposé calcule la moyenne empirique d'un $n-$échantillon de $T$ obtenu en simulant $D$ avec la fonction précédente et $Y$ par inversion avec la variable $V$ et la loi uniforme. Pour $n$ assez grand, la valeur affichée sera proche de l'espérance de $T$, c'est à dire 0.

# Exercice 3 :

1. Montrons que la famille $(I, J, K)$ est libre. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} aI + bJ + cJ = 0 &\iff a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix}a+c&b&b\\b&a&c\\b&c&a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = 0\\ b = 0\\ c = 0\end{cases}\end{aligned}$$

   Ainsi la famille $(I, J, K)$ est libre. Comme elle engendre $\mathcal{E}$, on conclut que $\boxed{(I, J, K) \text{ est une base de } \mathcal{E} \text{ et } \dim(\mathcal{E}) = 3}$.

2. Les matrices $J$ et $K$ sont symétriques donc diagonalisables.

3. (a) On trouve $J^2 = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&0\\2&0&0\end{pmatrix} = \boxed{2J}$.

   (b) D'après la question précédente $P(x) = x^3 - 2x$ est un polynôme annulateur de $J$. La factorisation :

$$P(x) = x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right),$$

   montre que les racines de $P$ sont $0$, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Il s'ensuit que les valeurs propres de $J$ sont des éléments de $\left\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$.

4. (a) On a :

$$JU_1 = \begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix} = \sqrt{2}U_1 \quad \text{et} \quad JU_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

   donc $\boxed{U_1 \text{ et } U_2 \text{ sont des vecteurs propres de } J \text{ respectivement associés aux valeurs propres } \sqrt{2} \text{ et } 0}$.

   (b) On résout le système $\left(J + \sqrt{2}I\right)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \left(J + \sqrt{2}I\right)X = 0 &\iff \begin{pmatrix}\sqrt{2}&1&1\\1&\sqrt{2}&0\\1&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y + z = 0\\ x + \sqrt{2}y = 0\\ x + \sqrt{2}z = 0\end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y + z = 0 & \\ \sqrt{2}x + 2y = 0 & L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2\\ \sqrt{2}x + 2z = 0 & L_3 \leftarrow \sqrt{2}L_3\end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y + z = 0 & \\ y - z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ -y + z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y + z = 0\\ z = y\end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\sqrt{2}y\\ z = y\end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}y\\y\\y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{avec} y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{U_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } J \text{ associé à la valeur propre } \sqrt{2}}$.

5. (a) La famille $(U_1, U_2, U_3)$ est libre puisqu'elle est formée de vecteurs propres de $J$ associés à des valeurs propres distinctes. Il s'agit d'une famille libre de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, qui est lui–même de dimension trois, donc $\boxed{(U_1, U_2, U_3) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

   (b) On prend pour $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}3,1(\mathbb{R})$ vers la base $(U_1, U_2, U_3)$. Cette matrice est inversible et ses colonnes correspondent aux matrices colonnes $U_1, U_2, U_3$ :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

6. (a) Après calculs on trouve : $KU_1 = U_1$, $KU_2 = -U_2$ et $KU_3 = U_3$. Il en ressort que $U_1$, $U_2$ et $U_3$ sont des vecteurs propres de $K$ respectivement associés aux valeurs propres 1, $-1$ et 1. Or on a déjà vu en 5-a) que $(U_1, U_2, U_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc $\boxed{(U_1, U_2, U_3) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ formée de vecteurs propres de } K}$.

   (b) Comme $P$ est la matrice de passage de la base canonique dans la base $(U_1, U_2, U_3)$, les colonnes de la matrice $P^{-1}KP$ sont les matrices coordonnées de $KU_1$, $KU_2$ et $KU_3$ dans la base $(U_1, U_2, U_3)$ :

$$\boxed{P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

7. (a) On développe :

$$P^{-1}MP = P^{-1}(aI + bJ + cK)P = aP^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP = aI + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP,$$

puis on remplace par les tableaux de nombres :

$$P^{-1}MP = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + c \end{pmatrix}}.$$

   (b) La matrice $P^{-1}MP$ étant diagonale, ses valeurs propres sont $a + b\sqrt{2} + c$, $a - c$ et $a - b\sqrt{2} + c$ (éventuellement avec répétition). Or, deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres, d'où

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(P^{-1}MP) = \left\{a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c\right\}}.$$

8. (a) On a :

$$s(I) = (1, 1, 1), \quad s(J) = \left(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad s(K) = (1, -1, 1).$$

   On en déduit :

$$\boxed{S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}}.$$

   (b) On applique la méthode de Gauss à la matrice $S$ :

1. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

On obtient une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, il s'ensuit que la matrice $S$ est inversible, et que $\boxed{\text{l'application linéaire } s \text{ est bijective}}$.

9.

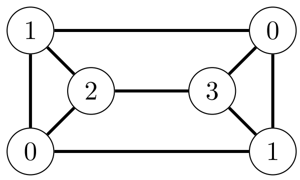
```python
def voisins(A,i):
    n = len(A[i])
    V = []
    for j in range(n):
        if j!= i and A[i,j]!= 0:
            V.append(j)
    return(V)
```

```python
def min_ext(L):
    m = 0
    while m in L:
        m = m + 1
    return(m)
```

10.

```python
def coloration(A):
    n = len(A[0])
    C = [i for i in range(n)]
    for i in range(1,n):
        C_voisins = [C[j] for j in voisins(A,i)]
        C[i] = min_ext(C_voisins)
    return(C)
```

12. (a) En exécutant « `coloration(A)` » on obtient la liste $[0, 1, 0, 1, 2, 3]$, dont voici la coloration associée :




(b) La réponse est oui, voici une coloration de $G$ avec trois couleurs :