Feuille d'exercices n°5 : Applications linéaires

1 Méthodes de base

Exercice 1. – **Montrer qu'une application est linéaire** – Montrer que chacune de ces applications est linéaire.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x+y, x-y+z, x+2y-z)$.
2. $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM - MA$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
3. $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par de la manière suivante : si P est une fonction polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$, alors $f(P)$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(P)(x) = P(x) - P(2x)$.

Exercice 2. – **Déterminer le noyau d'une application linéaire** – Déterminer une base du noyau de chacune des applications linéaires de l'exercice précédent.

Exercice 3. – **Théorème du rang** – Reprendre les exemples précédents et déterminer le rang de f.

Exercice 4. – **Déterminer la matrice d'une application linéaire** – Déterminer la matrice dans la base canonique de chacune des applications linéaires de l'exercice 1.

Exercice 5. – **Expliciter une application linéaire à partir de sa matrice** – Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)$.

Exercice 6. – **Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme** – On considère l'application $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(P) = (P(0), P(1), P(2))$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Exercice 7. – **Injection, surjection** – Déterminer (de la manière la plus simple possible) si chacune des applications linéaires suivantes est injective, surjective.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x-4y+z, x+y-z)$.
2. dans $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x-4y, 3x+y)$.

Exercice 8. – **Matrice colonne représentant un vecteur dans une base** – Déterminer la matrice colonne des coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ dans chacun des cas suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = ((1,1,0), (1,0,1), (0,1,1))$ et $u = (1,1,-1)$.
2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$: $\mathcal{B} = (X^3, X^2-1, X^2+2X-1, X+3)$ et $u = X^3 + X^2 - 2$
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ et $u = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. – **Changement de base pour les vecteurs** – On reprend les exemples de l'exercice précédent. Pour chacun d'eux, on note $\mathcal{B}_0$ la base canonique. Pour chacund d'eux :

1. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.
2. Retrouver les coordonnées dans $\mathcal{B}_0$ de chaque vecteur u à l'aide de cette matrice de passage et des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 10. – **Formule de changement de base pour une application linéaire** – On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (3x - y, 2x)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. On note $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,2)$. Déterminer la matrice B de f dans la base (v_1, v_2) de deux manières différentes (et vérifier que les résultats coincident) :
   (a) Directement
   (b) En utilisant la formule de changement de base.
3. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$; déterminer A^{-1}.

Exercice 11. – **Polynôme de matrice et inversibilité** – On reprend l'application f de l'exercice précédent et on note P le polynôme défini par $P(X) = X^2 - 3X + 2$.
Calculer $P(A)$. En déduire que f est un isomorphisme et déterminer sa réciproque.

2 Divers

Exercice 12. – Montrer que l'application suivante n'est pas linéaire : $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^2 - M \end{array} \right.$.

Exercice 13. – Déterminer les noyaux des applications linéaires suivantes. Déterminer si elles sont injectives ou surjectives.

1. $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y + z \end{pmatrix} \end{array} \right.$
2. $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - y & x + y \\ y - z + t & -y - z + t \end{pmatrix} \end{array} \right.$
3. $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \mapsto & (x - y, y, x + 3y, x - 2y) \end{array} \right.$
4. $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - X^2 P''(X) \end{array} \right.$
   (après avoir montré qu'elle est linéaire)

Exercice 14. – **Exemple de détermination d'une base de l'image** – On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer les images par f de e_1, e_2, e_3.
   (b) Ces images forment-elles une famille libre ?
   (c) En déduire une base de l'image ainsi que le rang de f.
2. (a) Déterminer le noyau de f.
   (b) En déduire le rang de f ainsi qu'une base de son image.

Exercice 15. – Soit $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - (X-1)P'(X) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f. L'application f est-elle surjective ?
3. Calculer l'image de la base canonique par f. En déduire une base de l'image de f sans autres calculs.
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 16. – Soit $f\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-y+z, -x+y+z)\end{array}\right.$

1. Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $A^3 - A^2 - 4A$.
3. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner son application réciproque.

Exercice 17. – Déterminer les matrices A des applications linéaires suivantes par rapport aux bases (canoniques si on ne précise pas une autre base) de leurs espaces de départ et d'arrivée.

1. $f\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x-y+z\\x+y\\z\end{pmatrix}\end{array}\right.$,
2. $f\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{2}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2}(\mathbb{R})\\ \begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x-y & x+z\\x+t & y+t\end{pmatrix}\end{array}\right.$,
3. $f\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y+2z, x+y, y-z)\end{array}\right.$,
4. $f\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{2}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2}(\mathbb{R})\\ M & \mapsto & \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\times M\end{array}\right.$,
5. $f\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3\\ P(X) & \mapsto & (P(0), P(1), P(2))\end{array}\right.$.

Exercice 18. – Reprendre les données de l'exercice précédent.
Déterminer si ces applications linéaires sont bijectives. Dans l'affirmative, déterminer la matrice de leur application réciproque relativement aux bases canoniques des espaces considérés.

Exercice 19. – **Application du changement de base au calcul des puissances d'une matrice** –
On considère la matrice carrée d'ordre 3 :$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère l' endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrices dans $\mathcal{B}$ est A.

1. Sans calcul, justifier que A est non inversible. Déterminer le rang de A.
2. Déterminer les espaces :
$$E_0 = \text{Ker } (f),$$
$$E_1 = \text{Ker } (f - id_{\mathbb{R}^3}),$$
$$E_4 = \text{Ker } (f - 4id_{\mathbb{R}^3}).$$
En déduire trois vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^3$ tels que :
$$f(u) = 0, f(v) = v, f(w) = 4w.$$
On prendra la première coordonnée de chacun de ces vecteurs égale à 1.
3. Vérifier que u, v, w forment une base. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

4. En déduire une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que : $A = PDP^{-1}$.
5. Calculer P^{-1}.
6. En déduire l'expression de A^n.

Exercice 20. – Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble E_λ des vecteurs (x, y) tels que $f(x, y) = \lambda(x, y)$.
2. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. On note $V_1 = \text{Ker }(f - Id_{\mathbb{R}^3})$. Montrer que V_1 possède une base constituée d'un seul vecteur, que l'on notera e_1 (on choisira le premier coefficient de e_1 égal à 1).
2. Déterminer $e_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(e_2) = e_2 + e_1$ (on choisira le premier coefficient de e_2 égal à -1).
3. Déterminer $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(e_3) = e_3 + e_2$ (on choisira le premier coefficient de e_3 égal à 2).
4. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On notera $\mathcal{B}$ cette base.
5. Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$.
6. On note P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Quel est le lien entre A d'une part et P, P^{-1} et T d'autre part ?
7. Un des intérêts de mettre la matrice A sous cette forme est qu'elle permet le calcul de ses puissances.
   (a) Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et T^n.
   (b) Déterminer la matrice N telle que $T = N + I_3$.
   (c) Calculer N^2 puis N^k pour $k \geq 3$.
   (d) En déduire, pour $n \geq 0$, l'expression de T^n (on pourra utiliser la formule du binôme).
   (e) Expliciter P et déterminer son inverse.
   (f) En déduire, pour $n \geq 0$, l'expression de A^n.
   (g) Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?