

DM n°5

À rendre le 02/03/2026

Exercice 1

On effectue une succession de lancers (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir «Pile» vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir «Face» vaut également $\frac{1}{2}$.

On admet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience aléatoire.

On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier «Pile» et la variable Y , égale au rang d'apparition du premier «Face».

1. Donner la loi commune à X et Y , ainsi que les valeurs de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X .
2. Que vaut $P([X = 1] \cap [Y = 1])$? En déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.
3. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P(Y = j)$.
 (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P(X = i)$.
 (c) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire XY . On précisera $(XY)(\Omega)$.
 (d) Montrer que l'espérance de XY existe, puis donner sa valeur.
 (e) Calculer la covariance de X et Y . En déduire que la variance de $X + Y$ est égale à 2.
4. (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$. On précisera $(X + Y)(\Omega)$.
 (b) Montrer que les variables aléatoires $X + Y$ et $XY + 1$ sont de même loi.
5. On décide simuler l'expérience aléatoire en codant «Pile» par 1 et «Face» par 0.
 - (a) Écrire une fonction `lancer()` qui renvoie 1 avec probabilité $1/2$ et 0 avec probabilité $1/2$.
 - (b) Compléter le script Python suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage des valeurs prises par les variables aléatoires X et Y lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
import numpy.random as rd

X = 1
Y = 1
l = lancer() # premier lancer
if l == 1: # on a obtenu pile au premier lancer
    # X est fixé à 1
    # On lance ensuite jusqu'à obtenir Face
    # et on augmente Y à chaque lancer
    while l == ... :
        Y = ...
        l = ... # nouveau lancer
elif l == 0:
    ...
    ...
    ...

print(X)
print(Y)
```

Exercice 2

Exercice 1 du sujet 0 ECRICOME