Concours Blanc - V2

le 09/11/2024
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
4. (a) Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$ (On pourra utiliser le développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto e^x$).
   (b) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = xe^x - e^x + 1$.
   (b) En déduire le signe de $g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

   On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
7. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = f(-x)$.
   (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
8. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
9. Écrire un programme en Python permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.
   On suppose numpy importé par la commande `import numpy as np`.

Exercice 2

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad$ et $\quad v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.
   (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser son tableau de variations.

(c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = f(n)$.

(d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(e) Écrire une fonction d'en-tête `def u(n):` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.
On suppose la fonction `log` (pour ln) importée du module numpy.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

(b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

(d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n)$.

(e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ converge vers γ.

3. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \gamma| \leq \dfrac{1}{n}$

(c) La fonction `floor` a été importée du module numpy. On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x. On suppose également que la fonction `u` de la question 1) e : a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = 10**(-4)
n = floor(1/eps) + 1
print(u(n))
```

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

1. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

2. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

(b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$
où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

(b) Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

(b) Retrouver alors le résultat de la question 3) b :

Exercice 3

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. (a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

2. (a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$.

   (c) Utiliser la question 1 pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

   (d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi :
$\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce.
Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.

Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne,
puis il extrait une boule au hasard de cette urne.
On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair
et on désigne par A l'événement : " le joueur gagne ".
On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1. Reconnaître la loi de N.
2. (a) On suppose le module `numpy` importé par la commande `import numpy as np`.
   Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

   (b) Compléter les commandes `Python` suivantes pour qu'elles simules N et X puis renvoient l'un des deux messages " le joueur a gagné " ou " le joueur a perdu ".
   On suppose le module `numpy.random` importé par la commande `import numpy.random as rd`.
   On rappelle qu'alors la commande `rd.geometric(p)` simule une variable alétoire de loi géométrique de paramètre `p` et `rd.randint(a,b)` simule une variable alétoire de loi uniforme discrète sur `{a,...,b-1}`.

```
p = float(input('donner la valeur de p'))

N = rd.geometric(...)

X = rd.randint(...,...)

if ... :
    print('...')
else :
    print('...')
```

3. (a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $P_{(N=2j)}(X=2k+1)$.
   (b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)$.
   (c) Déterminer $P_{(N=2j)}(X=2k+1)$ lorsque k appartient à $[[0,j-1]]$.
   (d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)$ lorsque k appartient à $[[0,j]]$.

4. (a) Justifier que $P(X=2k+1)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X=2k+1)$.

   En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(X=2k+1)=\frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j}+\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

   (b) En déduire que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(X=2k+1)=\dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q\frac{t^{2k}}{1-t}dt$.

5. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt=0$.
   (b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=2k+1)=\frac{p}{q}\left(\int_0^q\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt-\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

   (c) En déduire que : $P(A)=\dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt$.

6. (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}=\frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1-t)^2}$$

   (b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q.
   (c) En déduire que $P(A)>\dfrac{1}{2}$.