

Corrigé du DM n°5

À rendre le 02/03/2026

Exercice 1

1. L'expérience aléatoire est une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes (succès : obtenir «Pile», de probabilité $1/2$). La variable aléatoire X représente le rang du premier succès. Donc X suit une loi géométrique de paramètre $1/2$

Son espérance est $E(X) = \frac{1}{1/2} = 2$, sa variance $V(X) = \frac{1 - 1/2}{(1/2)^2} = 2$.

Pour les mêmes raisons, la variable aléatoire Y suit la même loi.

2. On ne peut avoir simultanément le premier Pile et le premier Face au premier lancer.
Donc $[X = 1] \cap [Y = 1] = \emptyset$ et $P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$.
Par ailleurs $P(X = 1) \neq 0$ et $P(Y = 1) \neq 0$; donc

$$P([X = 1] \cap [Y = 1]) \neq P(X = 1)P(Y = 1) .$$

On en conclut que X et Y ne sont pas indépendantes.

3. (a) Soit j un entier supérieur ou égal à 2.
On a clairement $[X = 1] \cap [Y = j] \subset [Y = j]$.
Réciproquement, supposons que l'événement $[Y = j]$ s'est produit. Comme $j \geq 2$, cela implique que le premier lancer a donné Pile, et donc que $X = 1$. On en déduit que $[Y = j] \subset [X = 1]$ et donc $[Y = j] \subset [X = 1] \cap [Y = j]$.
On déduit des inclusions précédentes que $[Y = j] = [X = 1] \cap [Y = j]$, et donc

$$P([X = 1] \cap [Y = j]) = P(Y = j) .$$

- (b) Les variables aléatoires X et Y jouant des rôles symétriques, cette égalité se démontre comme la précédente.
- (c) Les variables aléatoires X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et ne peuvent valoir 1 simultanément ; donc $(XY)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

En préambule au calcul de $P(XY = k)$, on fait la remarque suivante. Notons A_1 l'événement : le premier lancer a donné Pile. Alors $[X = 1] = A_1$ et $[Y = 1] = \overline{A_1}$. Ainsi les événements $[X = 1]$ et $[Y = 1]$ forment un système complet ; donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(XY = k) &= P([XY = k] \cap [X = 1]) + P([XY = k] \cap [Y = 1]) \\ &= P([Y = k] \cap [X = 1]) + P([X = k] \cap [Y = 1]) \end{aligned}$$

En utilisant les résultats des questions 3(a) et 3(b), on obtient

$$P(XY = k) = P([Y = k]) + P([X = k]) ;$$

et donc

$$P(XY = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} .$$

(d) Sous réserve de convergence absolue de la série,

$$E(XY) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Il s'agit d'une série géométrique dérivée de raison $1/2$ ($\in [0, 1[$), donc elle converge absolument. On en déduit que XY admet bien une espérance et que l'on a :

$$E(XY) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1 ;$$

d'où

$$E(XY) = \frac{1}{(1 - 1/2)^2} - 1 = 3.$$

(e)

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - 2 \times 2 = -1.$$

On peut en déduire la variance de $X + Y$ grâce à la formule :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

On obtient ainsi :

$$V(X + Y) = 2 + 2 + 2(-1) = 2.$$

4. (a) Comme X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a a priori $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Mais comme X et Y ne peuvent valoir 1 simultanément, on a en fait $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ On applique à nouveau la formule des probabilités totales avec le système complet formé par les événements $[X = 1]$ et $[Y = 1]$:

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= P([X + Y = k] \cap [X = 1]) + P([X + Y = k] \cap [Y = 1]) \\ &= P([1 + Y = k] \cap [X = 1]) + P([X + 1 = k] \cap [Y = 1]) \\ &= P([Y = k - 1] \cap [X = 1]) + P([X = k - 1] \cap [Y = 1]) \end{aligned}$$

Mais comme $k - 1 \geq 2$, on obtient, en appliquant les résultats des questions 3.a) et 3.b),

$$P(X + Y = k) = P(Y = k - 1) + P(X = k - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.$$

- (b) On a $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $(XY + 1)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$,

$$P(XY + 1 = k) = P(XY = k - 1) ;$$

puis, en utilisant le résultat de 3.c) :

$$P(XY + 1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = P(X + Y = k).$$

Ainsi les variables aléatoires $X + Y$ et $XY + 1$ sont de même loi.

5. (a) Remarque : il fallait supposer `numpy.random` importé dès cette question.

```
def lancer():  
    a = rd.random()  
    if a < 1/2:  
        return 1  
    else :  
        return 0
```

(b)

```
X = 1  
Y = 1  
l = lancer() # premier lancer  
if l == 1: # on a obtenu pile au premier lancer  
    # X est fixé à 1  
    # On lance ensuite jusqu'à obtenir Face  
    # et on augmente Y à chaque lancer  
    while l == 1:  
        Y += 1  
        l = lancer() # nouveau lancer  
elif l == 0:  
    while l == 0:  
        X += 1  
        l = lancer()  
  
print(X)  
print(Y)
```

Exercice 2

Exercice 1 du sujet 0 ECRICOME.

Remarque : le corrigé est celui fourni par ECRICOME ; il est parfois succinct, mais comporte également des remarques intéressantes sur ce qui est attendu.

Partie I

1. La matrice $A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ est de rang 2 puisque ses trois colonnes C_1 , C_2 et C_3 vérifient $C_1 + C_2 = 0$ avec (C_1, C_3) non colinéaires.

Ainsi, la matrice $A - 6I_3$ n'est pas inversible, ce qui signifie que 6 est une valeur propre de A . De plus, comme $\text{rg}(A - 6I_3) = 2$, on en déduit par le théorème du rang que l'espace propre associé à la valeur propre 6 est de dimension $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) - \text{rg}(A - 6I_3) = 3 - 2$. D'où $\dim(E_6(A)) = 1$.

$$2. \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$AU = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi U étant un vecteur non nul vérifiant $AU = 2U$.

U est donc bien un vecteur propre de A , et la valeur propre associée est 2.

NB: *il est attendu des candidats qu'ils mentionnent $U \neq 0$ pour vérifier la bonne connaissance de la définition d'un vecteur propre.*

3. (a) Montrons que $\mathcal{B} = (U, V, W)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Comme $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il suffit de vérifier que la famille $\mathcal{B}$ est libre.
Soient a , b et c trois réels tels que : $aU + bV + cW = 0$.

$$\text{Par identification des coefficients, on a : } \begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

NB: *Les candidats doivent bien maîtriser le vocabulaire. En particulier, le cardinal et la dimension ne doivent pas être confondus.*

- (b) $f(U) = AU = 2U$ puisque U est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.
 $f(V) = AV = U + 2V$ d'après la définition de U .

$$f(W) = AW = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6W.$$

Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est : $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

- (c) Comme A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, les matrices A et B sont alors semblables.

En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

alors P est inversible et on a :

$$A = PBP^{-1}$$

4. La matrice B est triangulaire, donc on lit son spectre sur sa diagonale : $Sp(B) = \{2, 6\}$. Or A et B sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres (car elles représentent un même application linéaire dans deux bases différentes) : $Sp(A) = Sp(B)$.

Comme 0 n'est pas valeur propre de A , la matrice A est donc inversible.

La matrice $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2, donc l'espace propre de B (donc de A) pour la valeur propre 2 est de dimension 1.

Ainsi $Sp(A) = \{2, 6\}$, mais $\dim(E_2(A)) + \dim(E_6(A)) = 2 < 3$. Donc A n'est pas diagonalisable.

Partie II

5. On peut remarquer que dans les cas où $x(0) = y(0)$, on conjecture que : $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = y(t)$.

6. En effectuant le produit matriciel, on a bien :

$$\forall t \in \mathbb{R}, AX(t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ x(t) - y(t) + 2z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = X'(t)$$

7. $\forall t \in \mathbb{R}, \boxed{Y'(t)} = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}PBP^{-1}X(t) = BP^{-1}X(t) = \boxed{BY(t)}$

8. (a) L'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ a pour ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S}_1 = \{t \mapsto ae^{6t}, a \in \mathbb{R}\}}$.

- (b) L'équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$ a pour ensemble de solutions : $\boxed{\mathcal{S}_2 = \{t \mapsto be^{2t}, b \in \mathbb{R}\}}$.

- (c) Soit c un réel. Notons $\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = cte^{2t}$. La fonction ψ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t} = 2\psi(t) + ce^{2t}.$$

Ainsi ψ vérifie l'équation différentielle $(\mathcal{E}_3)$.

Comme les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}_3)$ sont les solutions de $(\mathcal{E}_2)$, on en déduit que

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (\mathcal{E}_3) \text{ est : } \mathcal{S}_3 = \{t \mapsto de^{2t} + cte^{2t}, d \in \mathbb{R}\}}.$$

9. On a montré dans la question 7. que : $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = BY(t)$. On a donc : $\forall t \in \mathbb{R},$

$$\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc : } \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha'(t) = 2\alpha(t) + \beta(t) \\ \beta'(t) = 2\beta(t) \\ \gamma'(t) = 6\gamma(t) \end{cases}$$

Ainsi, γ est bien solution de $(\mathcal{E}_1)$: on peut dire qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = ae^{6t}$ d'après la question 8.a.,

β est bien solution de $(\mathcal{E}_2)$: on peut dire qu'il existe un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \beta(t) = be^{2t}$ d'après la question 8.b.

Et on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha'(t) = 2\alpha(t) + be^{2t}.$$

Alors α est solution de $(\mathcal{E}_3)$ pour $c = b$ en se rapportant à la question 8.c..

On peut donc dire qu'il existe un $d \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t) = de^{2t} + bte^{2t} = (bt + d)e^{2t}$.
Finalement, il existe trois réels a, b et d tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} (bt + d)e^{2t} \\ be^{2t} \\ ae^{6t} \end{pmatrix}$$

NB: Cette question sera bien rémunérée dans le barème, à condition qu'elle soit bien rédigée et que les appels aux questions précédentes soient bien établis.

10. Comme pour tout réel t , $Y(t) = P^{-1}X(t)$, on en déduit par équivalence que : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = PY(t)$

$$\text{Donc pour tout } t \text{ réel, } X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (bt + d)e^{2t} \\ be^{2t} \\ ae^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(bt + b + c)e^{2t} + ae^{6t} \\ 2(bt + d)e^{2t} + ae^{6t} \\ (2(bt + d) + b)e^{2t} \end{pmatrix}$$

En prenant $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = d$ et $\lambda_3 = a$, on a bien le résultat voulu.

11. Avec les notations précédentes, on a :
$$\begin{cases} x_0 = x(0) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ y_0 = y(0) = 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ z_0 = z(0) = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

$$\text{Ce qui donne, en inversant le système que : } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{x_0 - y_0}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-x_0 + y_0 + 2z_0}{4} \\ \lambda_3 = \frac{x_0 + y_0 - 2z_0}{2} \end{cases}$$

Ce qui donne alors que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = ((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0))e^{2t} + (\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0)e^{6t} \\ y(t) = ((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(y_0 - x_0))e^{2t} + (\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0)e^{6t} \\ z(t) = ((x_0 - y_0)t + z_0)e^{2t} \end{cases}$$

NB: Les candidats qui démarrent correctement, mais qui obtiennent quelques erreurs de calculs peuvent obtenir des points de méthode à condition d'être honnête et de signaler leur erreur manifeste sur leur copie. Les candidats qui trafiquent leurs calculs erronés pour obtenir le résultat de l'énoncé seront sanctionnés.

12. En particulier, lorsque $x_0 = y_0$, on obtient que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = z_0e^{2t} + (x_0 - z_0)e^{6t} \\ y(t) = z_0e^{2t} + (x_0 - z_0)e^{6t} \\ z(t) = z_0e^{2t} \end{cases}$$

En particulier, on a bien $x(t) = y(t)$ pour tout t réel.