

## TP9 : Lois à densité

### A retenir de ce TP

- Comment faire un histogramme et l'interpréter;
- La visualisation à l'aide d'un histogramme d'une loi à densité simulée.

## 1 Quelques outils pour le TP

On importe tout d'abord les modules dont on aura besoin :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

### Tracer le graphe d'une fonction

Tester l'exemple suivant :

```
def f(x):
    return x**2 - 1

X = np.linspace(0,1,100)
Y = f(X)
#alternative :
Y1 = [f(x) for x in X]

plt.plot(X,Y1)
```

### Utilisation du module numpy.random

Pour obtenir un nombre aléatoire selon la loi uniforme entre 0 et 1 : `rd.random()` ; pour obtenir une liste de 10 nombre aléatoires : `rd.random(10)`.

On peut obtenir un nombre aléatoire tiré selon une autre distribution (avec les paramètres adéquats) : `rd.normal(0,1)` (le premier paramètre est la moyenne, le second l'écart-type).

### Tracer un histogramme

On définit le vecteur :

```
x = [0.11 , 0.24 , 0.63 , 0.72 , 0.33 , 0.11 , 0.44 , 0.82 , 0.53 ,
     0.93 , 0.71 , 0.94 , 0.43 , 0.32 , 0.73 , 0.41 , 0.84 , 0.02 , 0.73 , 0.63 ]
```

1. La commande la plus simple pour faire un histogramme est la suivante : `plt.hist(x,2)` .  
Tester aussi `plt.hist(x,4)` .  
Le problème est que l'on ne maîtrise pas les intervalles servant de base à chaque rectangle.
2. Pour éviter ce problème, on préférera donc la manière suivante pour obtenir un histogramme : on définit un vecteur  $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$  ; les intervalles de base des rectangles seront alors  $[b_0, b_1]$ ,  $[b_1, b_2]$ ,  $\dots$ ,  $[b_{n-1}, b_n]$ .  
Essayer avec : `b = np.linspace(0,1,11)`; `plt.hist(x,b)` .  
Quel est le lien entre les effectifs et la taille des rectangles ?
3. Pour représenter des densités de lois de probabilités, on ne souhaite pas que la hauteur des rectangles soit proportionnelle aux effectifs, mais que la surface des rectangles le soit.  
Tester avec `b2 = [0 , 0.6 , 1]` la commande `plt.hist(x,b2)` puis `plt.hist(x,b2,density = True)`.  
Bien observer la différence.

## 2 Histogramme et simulation de lois à densité

On a vu au paragraphe précédent que dans un histogramme, l'aire de chaque rectangle est égale à la proportion des valeurs de l'effectif total qui sont dans la classe représentée par ce rectangle.

Rappelons que pour une loi à densité, l'aire sous la courbe sur un intervalle est la probabilité de se trouver dans l'intervalle sous cette loi.

Si les valeurs de  $\mathbf{x}$  représentent des tirages selon une certaine loi à densité, l'histogramme représente donc une version empirique (associée à cette suite de tirages) de la densité.

### Exercice 2.1 – Simulation de la loi uniforme et histogramme

1. Créer un vecteur  $x$  rassemblant 1000 tirages selon cette loi uniforme (sur  $[0, 1]$ ).
2. Estimer la moyenne empirique associée à ces tirages.
3. Tracer l'histogramme (avec `b=np.linspace(0,1,11)`) associé à ce tirage et sur le même graphique la densité de la loi uniforme.
4. Que constate-t-on ? Et avec 10000 tirages ?

### Exercice 2.2 – Transformation affine d'une loi uniforme

Soit  $X$  une V.A. de loi uniforme sur  $[0; 1]$ . On définit une nouvelle V.A.  $Y$  en posant  $Y = 2X + 1$ .

1. Simuler un tirage de 10000 réalisations de  $X$  puis, en utilisant celui-ci, de 10000 réalisations de  $Y$ .
2. Tracer l'histogramme associé à ces tirages selon la loi de  $Y$ . Quelle semble être la loi de  $Y$  ?
3. Déterminer la fonction de répartition de  $Y$  puis sa densité. Cela confirme-t-il le résultat de la question précédente ?

### Exercice 2.3 – Simulation d'une loi exponentielle

Soit  $X$  une V.A. de loi uniforme sur  $[0; 1]$ . On définit une nouvelle V.A.  $Y$  en posant  $Y = -\ln X$ .

1. Simuler un tirage de 10000 réalisations de  $X$  puis, en utilisant celui-ci, de 10000 réalisations de  $Y$ .
2. Tracer l'histogramme associé à ces tirages selon la loi de  $Y$ .
3. Déterminer la fonction de répartition de  $Y$  puis sa densité. Superposer cette densité à l'histogramme obtenu.

## 3 Autour de la loi normale

### Exercice 3.1 – Evolution de la densité en fonction de ses paramètres

1. Créer une fonction python qui prend en entrée les paramètres  $m$  et  $\sigma$  et qui trace la densité de la loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  sur l'intervalle  $[-5; 5]$ .
2. Représenter sur un même dessin différentes densités : on pourra choisir  $m = 0$ ,  $m = 2$ ,  $m = -1$  dans le cas  $\sigma^2 = 1$ , puis, sur une autre dessin,  $\sigma^2 = 1$ ,  $\sigma^2 = 4$  dans le cas  $m = 0$ .

### Exercice 3.2 –

1. Simuler 10 000 réalisations d'une V.A. de loi  $\mathcal{N}(0; 1)$ .  
Vérifier que l'histogramme associé à ce tirage se superpose bien avec la densité de la loi normale (on se restreindra à l'intervalle  $[-5; 5]$ ).
2. Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{N}(0; 1)$ , quelle est la loi suivie par  $Y = X/2 + 1$  ? Vérifier cela graphiquement en simulant 10 000 tirages de  $X$ , puis de  $Y$ , et en traçant l'histogramme associé (et en le superposant avec la densité attendue).