

TP n° 12 : Systèmes différentiels

L'objectif de ce TP est de tracer les trajectoires des solutions d'un système différentiel.

1 Un premier exemple

On considère le système différentiel suivant :

$$(SD) \begin{cases} x' &= -\frac{5}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{2} \\ y' &= -\frac{3}{8}x - \frac{7}{8}y - \frac{1}{2} \end{cases}.$$

1. Montrer que le couple de fonctions constantes définie par $x_p(t) = 1$ et $y_p(t) = -1$ est solution.
2. Montrer, après avoir mis ces systèmes sous forme matricielle, qu'un couple (x, y) est solution de (SD) ssi $(x - x_p, y - y_p)$ est solution du système homogène associé :

$$(SDH) \begin{cases} x' &= -\frac{5}{8}x - \frac{1}{8}y \\ y' &= -\frac{3}{8}x - \frac{7}{8}y \end{cases}.$$

3. En déduire la forme générale d'une solution (le système homogène a été résolu en TD).
4. Déterminer l'expression exacte de x et y lorsque $x(0) = y(0) = 1$.
Quelle est la limite des fonctions x et y lorsque t tend vers $+\infty$?
5. Tracer sur le même graphique les courbes représentant x et y .
6. La trajectoire associée à ce système différentiel est le tracé des positions des points $(x(t), y(t))$ pour $t \geq 0$.
Tracer ces courbes à l'aide de python.
7. Observer ce comportement lorsque l'on change les valeurs de $x(0)$ et $y(0)$.

2 Comportement en fonction des valeurs propres

Rappelons que la résolution du système différentiel du 1. a été obtenue par la diagonalisation de la -matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

en $A = PD_1P^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons observé au 1. les trajectoires d'une solution du système différentiel associé (après résolution de ce système).

Nous souhaitons dans cette partie observer les trajectoires lorsque l'on change le signe des valeurs propres. Pour cela, nous allons tracer les trajectoires lorsque la matrice associée au système est successivement

$$A_2 = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{puis} \quad A_3 = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} .$$

Ces tracés seront obtenus grâce au module `scipy.integrate`. Un modèle pour le fonctionnement de certaines fonctions de ce module est fourni dans le fichier `traj_et_val_pr_Acompleter.py`.

1. Observer les graphiques obtenus. On expliquera au préalable la différence entre les deux types de tracés obtenus dans le modèle fourni dans le fichier.
2. Modifier le point de départ et observer l'influence sur les trajectoires.
3. Changer A_1 en A_2 puis A_3 .
Que peut-on en conclure sur l'influence des valeurs propres de la matrice associée au système ?