

Feuille d'exercices n°11 : Fonctions de deux variables

1 Méthodes de base

Exo 1. – Calculs de dérivées partielles, gradient – Pour chacune des fonctions suivantes, calculer ses dérivées partielles et déterminer son gradient.

$$1. f \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2y - 3xy^2 + 2y^3 \end{array} \right. \quad 2. f \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x \ln(x^2 + y^2) \end{array} \right. \quad 3. f \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{ye^x}{x} \end{array} \right.$$

Exo 2. – Calculs de dérivées secondes, matrice Hessienne – Reprendre les deux premières fonctions de l'exercice précédent ; déterminer leurs dérivées secondes ainsi que leur matrice hessienne en chaque point de leur ensemble de définition.

Exo 3. – Nature des points critiques – Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier que le point donné est un point critique et étudier sa nature :

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0, 0)$,
2. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0, 0)$.

Exo 4. – Recherche d'extrema – Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : (x, y) \mapsto (xy)(x + y - 1)$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

Exo 5. – Extremum global – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$.

1. Déterminer ses points critiques.
2. Montrer qu'en ces points critiques f admet un extremum global.
3. Pouvait-on conclure (quant aux extrema locaux) grâce à la Hessienne ?

2 Divers

Exo 6. – Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur le domaine $\mathcal{D}$ (dont on admet qu'il s'agit d'un ouvert).

1. $f : (x, y) \mapsto x((\ln(x))^2 + y^2)$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{y-x} \ln(x)$,
 $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y\}$.

Exo 7. – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x(y + 1 - x)$.

1. Montrer que f admet un maximum sur le domaine $\mathcal{D} = [0, 1]^2$.
2. Déterminer ce maximum.

Exo 8. – On considère deux fonctions notées g et h . La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $g((x, y)) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$; la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = 2e^{-x} + 2x^2$.

1. Montrer que l'équation $2x - e^{-x} = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer α).
2. (a) Justifier que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
 (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g .
 (c) Montrer que le seul point critique de g est le point $M = (\alpha, \alpha)$.
 (d) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de g .
 Montrer que g présente en M un minimum local de valeur $2\alpha(2 + \alpha)$.
3. (a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g((x, y)) \geq h(x)$.
 (b) Etudier les variations de h et montrer que h présente en $x = \alpha$ un minimum global.
 (c) En déduire que le minimum local présenté en M est aussi un minimum global pour g .

Exo 9. –

1. Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = x^2 + \ln x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1/2 < \alpha < 1$.
2. On considère l'application : $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y) = x e^y + y \ln x$.
 - (a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α .
 - (c) Est-ce que F admet un extremum local ?

Exo 10. – On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = x^2 y + \ln(1 + y^2)$

1. Déterminer ses points critiques.
2. Déterminer sa matrice hessienne en ce(s) point(s) critique(s). Que peut-on en déduire ?
3.
 - (a) f admet-elle un maximum en ce(s) point(s) critique(s) ?
 - (b) Étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x, -x^2)$.
 - (c) f admet-elle un minimum en ce(s) point(s) critique(s) ?
 - (d) Conclure.