Feuille d'exercices n°1 : Comparaison des fonctions

1 Méthodes de base

Exercice 1. – Application des règles de base sur les limites – Déterminer chacune des limites suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{2}{x^5-1}$ en 1^+ et 1^-
2. $x \mapsto \dfrac{e^x}{x-1}$ en 1^+ et 1^-
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 0^+
4. $x \mapsto x^2 e^{1/x}$ en $-\infty$
5. $x \mapsto \ln(x^2+x+5)$ en $+\infty$
6. $x \mapsto (x^2+x+5)^x$ en $+\infty$

Exercice 2. – Dérivation – Dériver chacune des fonctions suivantes sur son intervalle de définition I.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^5}$ sur $I =]0;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}e^x$ sur $I =]0;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $I =]0;+\infty[$
4. $f : x \mapsto e^{x^2+x+5}$ sur $I = \mathbb{R}$
5. $f : x \mapsto \ln(x^2+x+5)$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+x+5)^3}$ sur $I = \mathbb{R}$
7. $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+5}$ sur $I = \mathbb{R}$
8. $f : x \mapsto (x^2+x+5)^x$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 3. – Théorème de la bijection continue – On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x-2}}}.$$

1. Étudier la fonction f.
2. Montrer que l'équations $f(x) = 2$ admet une unique solution.

Exercice 4. – Utiliser la caractérisation de l'équivalence – Montrer que $x^3 + 7x^2 - 3x \underset{0}{\sim} -3x$.

Exercice 5. – Utiliser un équivalent pour déterminer une limite – Déterminer la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{1-(1+x)^{3/2}}$.

Exercice 6. – Déterminer des équivalents en 0 et $+\infty$ – Déterminer des équivalents simples (puissances de x) des fonctions suivantes au voisinage de 0 et $+\infty$:

1. $x \mapsto \frac{2x^2+3}{x^4-x^3+x}$,
2. $x \mapsto \sqrt{1+x} - 1$,
3. $x \mapsto x^2 + 2\ln x$.

Exercice 7. – Utiliser un DL2 pour déterminer une limite – Déterminer la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{x^2+\ln(1+3x)-3x}{2x^2+x^3}$.

Exercice 8. – Utiliser un DL pour établir la continuité et la dérivabilité en un point – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 2 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle y est dérivable.

Exercice 9. – Utiliser la formule de Taylor-Young pour établir un DL2 – Déterminer le DL2 en 0 de $f : x \mapsto (1+x)e^{x^2+x-1}$.

Exercice 10. – Position d'une courbe par rapport à sa tangente – On reprend $f : x \mapsto (1+x)e^{x^2+x-1}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 puis déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

2 Équivalents, développements limités, limites

Exercice 11. – Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes au voisinage de 0 et $+\infty$:

1. $x \mapsto \frac{x^3\ e^x}{\ln x + x^2}$,
2. $x \mapsto \frac{x^2 \ln(x)}{1+x^2}$,
3. $x \mapsto \ln(1+x) - \ln(x)$.

Exercice 12. – Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{2x}$,
2. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$,
3. $f : x \mapsto (1+x)^{3/2}$,
4. $f : x \mapsto e^{2+x}$,
5. $f : x \mapsto (1+x)^2 e^x$,
6. $f : x \mapsto \frac{xe^x}{\sqrt{1+x}}$.

Exercice 13. – Etudier localement au voisinage de 0 (équation de la tangente et positions relatives) les fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{1+x} - e^{-x}$,
2. $f_2 : x - \ln(1+x)$,
3. $f_3 : x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$.

Exercice 14. – Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{x^2}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x\ln(1+2x)}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$,

Exercice 15. – En utilisant les DL usuels, déterminer un DL2 en 1 des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^{3/2}}$.
2. $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{x}}$,

Exercice 16. – – En posant $X = 1/x$, étudier au voisinage de $+\infty$ les fonctions f et g définies par :

1. $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$,
2. $g(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+2/x})$.

3 Études de fonctions

Exercice 17. – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. (a) Étudier le sens de variation de $g : x \mapsto (x-1)e^x + 1$ et en déduire son signe.
   (b) Déterminer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.
   (c) Établir le tableau de variation de f.
   (d) Montrer que pour tout entier $n > 0$ il existe un unique réel positif u_n tel que $f(u_n) = n$.
   (e) Déterminer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).
4. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer l'équation de sa tangente.
5. On admet que le DL3 de l'exponentielle en 0 est : $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
   Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 18. – Soit f définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $x \mapsto \frac{\ln x}{(x-1)}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 1 (on note toujours f ce prolongement).
2. Montrer que f est dérivable en 1.
3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.