Corrigé du Concours Blanc - V2

le 09/11/2024
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

D'après EDHEC E 2003

1.

x	$-\infty$ $-$ 0 $+$ $+\infty$
$e^x - 1$	$\nearrow -$ 0 $+ \nearrow$
$\dfrac{e^x - 1}{x}$	$+$ 0 $+$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $x \neq 0$ et $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$ comme composée de fonctions continues.

En 0 : $e^x - 1 \sim x$ donc $\dfrac{e^x - 1}{x} \to 1$ et $\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) \to 0$ donc $f(x) \to f(0)$ donc f est continue en 0

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions C^1 et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} \\ &= \frac{e^x (x-1) + 1}{x(e^x - 1)} \end{aligned}$$

pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

4. (a) On utilise le développment limité de exp en 0 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$

Pour $x \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x (x-1) + 1}{x(e^x - 1)} \\ &= \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)\right)(x-1) + 1}{x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) - 1\right)} \\ &= \frac{x + x^2 - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(x) + 1}{x^2 (1 + \varepsilon_1(x))} \\ &= \frac{\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(x)}{x^2 (1 + \varepsilon_1(x))} = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x)}{1 + \varepsilon_1(x)} \\ &\to \frac{1}{2} \text{ quand } x \to 0 \end{aligned}$$

(b) Donc f est continue su $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 et $f'(x) \to 1/2$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 1/2$

5. (a) Etudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x\,e^x - e^x + 1$ g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = x\,e^x + e^x - e^x = x\,e^x$ d'où ses variations :

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow +$	0	$+ \nearrow$	

et son signe

(b) Comme, pour $x \neq 0$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(e^x - 1)}$ alors

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	
$e^x - 1$		$\nearrow -$	0	$+ \nearrow$	
$f'(x)$		$+$	$1/2$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -$	0	$+ \nearrow$	$+\infty$

En $+\infty$: $x = o(e^x)$ donc $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x\left[1-e^{-x}\right]}{x} \to +\infty$

En $-\infty$: $\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \to -\infty$

6. Par récurrence :
   - $u_0 > 0$.
   - Soit $n \geq 0$ tel que $u_n > 0$ alors $f(u_n) > 0$ car $f > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc $u_{n+1} > 0$
   - Donc pour tout entier n, $u_n > 0$

7. (a) Pour $x \neq 0$ on a $f(x) - x = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x x}\right) = \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right) = f(-x)$

   (b) Donc pour $x > 0$, $-x < 0$ et $f(-x) < 0$ d'après le tableau des variations de f et $(x) - x < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Comme pour tout n, $u_n > 0$ alors $f(u_n) - u_n < 0$ et $u_{n+1} < u_n$
   La suite (u_n) est donc décroissante.

8. La suit u est donc décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$
   Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue en ℓ et donc $f(\ell) = \ell$.
   Comme $f(x) - x = f(x)$ et ne s'annulle qu'en 0, on a donc $\ell = 0$
   Donc la suite u converge vers 0 en $+\infty$.

9.
```python
n = 0
u = 1
while u > 10**(-3):
   u = np.log((np.exp(u)-1)/u)
   n = n + 1

print(n)
```

Exercice 2

D'après ECRICOME E 2018

Partie I : Étude de deux suites

1. (a) On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = \ln(1) = 0$; donc, par somme,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$

En $+\infty$, on a une forme indéterminée ; mais on met tout sous un même logarithme et on sait que $x/(x+1)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable comme combinaison de fonctions usuelles dérivables. On a d'ailleurs

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variations de f

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	0

(c) Par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= f(n). \end{aligned}$$

(d) D'après le tableau de variations de f, on voit que $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, $f(n) < 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ et la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

(e)
```
def u(n);
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S = S + 1/k
    return S - log(n)
```

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

et c'est ce qu'on voulait.

(b) On peut étudier la fonction différence ou utiliser un argument de convexité. En effet, la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $]-1;+\infty[$ (elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et sa dérivée seconde est strictement négative). Sa courbe représentative se trouve donc au dessous de toutes ses tangentes, y compris celle en $x=0$ qui a pour équation $y=x+1$, et qui donne bien l'inégalité attendue.

En appliquant cette inégalité à $x=1/n$, on voit que $v_{n+1}-v_n \geq 0$ ou encore que (v_n) est croissante.

(c) La formule de Taylor-Young, ou une connaissance du cours permet d'écrire de développement limité à l'ordre 2 en 0 de cette fonction usuelle

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Comme $1/n \to 0$, si $n \to +\infty$, on peut utiliser ce DL dans l'expression de $v_{n+1}-v_n$:

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ou encore

$$v_{n+1}-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

(d) La série de terme général $1/2n^2$ est convergente comme multiple d'une série de Riemann convergente. Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme générale $v_{n+1}-v_n$ est donc de même nature c'est à dire convergente. On note alors γ la valeur de sa somme

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}(v_{n+1}-v_n).$$

(e) Le calcul de la somme partielle de la série susnommée fait apparaitre une somme télescopique ;

$$\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1}-v_k) = v_n - v_1 = v_n - (u_1 - 1) = v_n$$

Or, comme la série de terme général v_n converge, la suite de ses sommes partielles converge. Ainsi, d'après le calcul qui précède, (v_n) est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1}-v_k) = \sum_{k=1}^{+\infty}(v_{k+1}-v_k) = \gamma.$$

3. (a) Cette question n'étant pas vraiment formulée ; on interprète l'énoncé comme une demande de justification de la convergence de (u_n) et le calcul de sa limite. On voit que

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} \iff u_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Comme (v_n) converge et que $1/n \to 0$, on en déduit que (u_n) converge et a la même limite que (v_n), c'est à dire γ.

(b) (v_n) étant croissante et convergente vers γ, (u_n) étant décroissante et convergente vers γ, on a bien l'encadrement demandé

$$v_n \leq \gamma \leq u_n.$$

Ceci permet de voir que

$$0 \leq u_n - \gamma = v_n - \gamma + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

ce qui donne bien

$$|u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

(c) Le programme proposé permet de calculer une approximation de γ à la précision `eps` près (rentrée par l'utilisateur). En effet, une telle approximation sera réalisée par un terme u_n tel que $|u_n-\gamma| < \texttt{eps}$, ce qui, d'après la question précédente a lieu dès que $1/n < \texttt{eps}$. Il suffit de prendre le premier entier n tel que $n > 1/\texttt{eps}$, donné par $\lfloor \texttt{1/eps} \rfloor + 1$.

Partie II : Étude d'une série

1. Le terme général de la série est équivalent à celui d'une série convergente. En effet,
$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$
et la convergence de ce terme a été justifiée ci-avant.

2. (a) Observons que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$
et on reconnait une décomposition des indices de sommation selon leur parité.

(b) Il suffit de mettre au même dénominateur et de procéder par identification
$$\begin{aligned} \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha(2n-1)+\beta n}{n(2n-1)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha+\beta &=& 0 \\ -\alpha &=& 1 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha &=& -1 \\ \beta &=& 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(c) On utilise les résultats des deux dernières questions
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \qquad \text{(d'après 2b.)} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \qquad \text{(d'après 2a.)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

3. (a) On revient à la définition de u_n
$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n + \ln(2) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2), \end{aligned}$$
ce qu'on attendait.

(b) D'après 2c. et 3a., on a
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= 2 \times \lim_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n + \ln(2)) \\ &= 2\ln(2), \end{aligned}$$
car, comme (u_n) converge, u_{2n} et u_n ont même limite et leur différence tend vers 0.

4. (a) On voit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.\end{aligned}$$

(b) On reconnaît une suite de sommes de Riemann : si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

En prenant $g(x) = \ln(x+1)$, on voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln(2),$$

et on retrouve bien la valeur précédente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = 2\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = 2\ln(2).$$

Exercice 3

D'après EDHEC E 2015

Partie I

1. (a) Pour tout $t \in [0;x]$, on a $t^2 \leqslant x^2$, donc $1-t^2 \geqslant 1-x^2$. Or, on a également $1-x^2 > 0$ (car $0 < x < 1$, qui implique $x^2 < 1$). Donc $1-t^2 \geqslant 1-x^2 > 0$. Par conséquent, on peut passer à l'inverse et on obtient : $0 < \dfrac{1}{1-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1-x^2}$, ce qui donne, en multipliant par t^m (qui est positif ou nul) : $0 \leqslant \dfrac{t^m}{1-t^2} \leqslant \dfrac{t^m}{1-x^2}$.
On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x 0dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}dt$$

C'est-à-dire :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^m dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^m dt = \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. On en déduit :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Et donc, comme $x \leqslant 1$:

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}}$$

(b) On a sans difficulté : $\dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

2. (a) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $t^{2j} = (t^2)^j$. On reconnaît donc la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2, avec $t^2 \neq 1$. D'où :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-(t^2)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

(b) On intègre l'égalité ci-dessus sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}\,dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}\,dt$$

C'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^{2j}\,dt = \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x = \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$. Donc finalement :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt}$$

(c) D'après la question 1.(b) : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

Conclusion : la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

C'est-à-dire, d'après les questions 2.(b) et 2.(c) :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

Les $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$ se simplifient de chaque côté, et on en déduit :

$$\boxed{\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt}$$

Partie II

1. La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier succès (obtenir pile) à une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (les lancers de pièce), chacune ayant une probabilité de succès égale à p.

   Par conséquent, $\boxed{N \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$.

2. (a) La commande `np.floor` renvoie la partie entière d'un nombre. Il faut donc montrer que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ est égal à m si et seulement si m est pair. Pour cela, on fait une disjonction de cas :
   - Si m est pair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k$ également. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k = m$.
   - Si m est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k - 1$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k - \frac{1}{2}$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k - 1$. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k - 2 = m - 1 \neq m$.

   Ainsi, on a montré que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m$ si et seulement si m est pair.

   Conclusion : la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie donc la valeur de m si et seulement si m est pair.

   (b)

```
p = float(input('donner la valeur de p'))

N = rd.geometric(p)

X = rd.randint(1,N+1)

if 2*np.floor(m/2) == m:
    print('le joueur a perdu')
else :
    print('le joueur a gagné')
```

3. (a) Si $k \geqslant j$, alors $2k+1 > 2j$. Il est donc impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j$. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j}$.

   (b) De même, si $k \geqslant j+1$, alors $k > j$ et donc $2k+1 > 2j+1$. Par conséquent, il est impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j+1$. On en déduit que $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j+1}$.

   (c) Si k appartient à $[[0; j-1]]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j-1$ et donc, en particulier : $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j$. De plus, une fois l'urne remplie avec les boules numérotées de 1 à $2j$, chaque boule a la même probabilité d'être tirée. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j} \text{ si } k \leqslant j-1}$.

   (d) De même, si k appartient à $[[0; j]]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j+1$. En remplissant l'urne avec des boules numérotées de 1 à $2j+1$, la boule numérotée $2k+1$ peut donc être tirée. Et comme il y a équiprobabilité : $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j+1} \text{ si } k \leqslant j}$.

4. (a) Comme N suit une loi géométrique, on a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $\Big([N = n]\Big)_{n\geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = 2k+1)}$$

   Maintenant, on sépare la somme en deux (comme indiqué dans l'énoncé) entre, d'un côté les n pairs (qui s'écrivent sous la forme $2j$) et d'un autre côté les termes impairs (qui s'écrivent sous la forme $2j+1$) :

$$\begin{aligned} P(X = 2k+1) = &\sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j)P_{(N=2j)}(X = 2k+1) \\ &+ \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j+1)P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) \end{aligned}$$

On remplace $P(N=2j)$ et $P(N=2j+1)$ en se servant de la loi de N :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1) &= \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j-1}P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\ &\quad + \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\\ &= \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j}P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\ &\quad + \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j+1}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\end{aligned}$$

Enfin, on remplace $P_{(N=2j)}(X=2k+1)$ et $P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)$ en se servant de la question 3 :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\ &\quad + \frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1) \quad \text{(questions 3.a et 3.b)}\\ &= \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}\frac{1}{2j}\\ &\quad + \frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}\frac{1}{2j+1} \quad \text{(questions 3.c et 3.d)}\end{aligned}$$

D'où, en mettant $\frac{p}{q}$ en facteur :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)}$$

(b) D'après la question I.2.d et la partie admise juste après, on a (en remplaçant dans l'égalité ci-dessus) :

$$P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)$$

(on peut bien remplacer x par q car q appartient à $[0;1[$).
On simplifie :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}(t+1)}{(1-t)(1+t)}dt\end{aligned}$$

Ce qui donne bien (en simplifiant par $t+1$) :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt}$$

5. (a) Pour tout $t \in [0;q]$, on a $t \leqslant q < 1$, donc $1-t \geqslant 1-q > 0$, et donc, en prenant l'inverse :

$$0 < \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-q}$$

D'où, en multipliant par $\dfrac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$ (qui est positif ou nul car $t \geqslant 0$, $1-t \geqslant 0$ et $1+t \geqslant 0$) :

$$0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \leqslant \frac{1}{1-q} \times \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$$

On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;q]$:

$$0 \leqslant \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \leqslant \frac{1}{1-q}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (question I.1.b). On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

(b) On fait la somme en se servant du résultat de la question 4.(b) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt\right) \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{1-t}\right)dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\right)dt
\end{aligned}$$

On reconnaît (à l'intérieur de l'intégrale) la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2 (avec $t^2 \neq 1$). Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t}\times\frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}\right)dt \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}dt \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)}$$

(c) L'événement A est l'événement " X est impair". On a donc $A = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} [X=2k+1]$ (union disjointe). D'où

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1) \ ;$$

et donc

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) \ .$$

On a donc, d'après la question précédente,

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty}\frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right) \ ;$$

c'est-à-dire, d'après la question 5.(a) :

$$\boxed{P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt}$$

6. (a) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a(1-t)(1+t)+b(1-t)^2+c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{a(1-t^2)+b(1-2t+t^2)+c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{(-a+b)t^2+(-2b+c)t+(a+b+c)}{(1-t)^2(1+t)}\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, ceci est égal à $\dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)}$ pour tout $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ si $\begin{cases}-a+b&=&0\\-2b+c&=&0\\a+b+c&=&1\end{cases}$.

On résout ce système :

$$\begin{aligned}\begin{cases}-a+b&=&0\\-2b+c&=&0\\a+b+c&=&1\end{cases} &\iff \begin{cases}a&=&b\\c&=&2b\\a+b+c&=&1\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}a&=&b\\c&=&2b\\4b&=&1\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}a&=&1/4\\c&=&1/2\\b&=&1/4\end{cases}\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}=\frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1-t)^2}$$

avec $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$ et $c=\dfrac{1}{2}$.

(b) On reprend le résultat de la question 5.(c) et on calcule l'intégrale en se servant de la question précédente :

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt\\ &= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\int_0^q\frac{1}{1-t}dt+\frac{1}{4}\int_0^q\frac{1}{1+t}dt+\frac{1}{2}\int_0^q\frac{1}{(1-t)^2}dt\right)\\ &= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^q+\frac{1}{4}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^q+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q\right)\\ &= \frac{p}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q)+\frac{1}{4}\ln(1+q)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)\right)\\ &= \frac{1-q}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q)+\frac{1}{4}\ln(1+q)+\frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)\\ &= \frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne, en développant :

$$\boxed{P(A)=\frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right)+\frac{1}{2}}$$

(c) On a $0<1-q<1+q$ (car $q\in\,]0;1[$). On en déduit que $\dfrac{1+q}{1-q}>1$, et donc $\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right)>0$. De plus, $\dfrac{1-q}{4q}>0$ car $1-q>0$ et $4q>0$. Donc $\dfrac{1-q}{4q}\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right)>0$.

On en déduit, avec l'expression obtenue à la question précédente :

$$\boxed{P(A) > \frac{1}{2}}$$