APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout ce chapitre, E et F désigneront des espaces vectoriels de dimension finie (respectivement n et p).

1 Généralités

1.1 Définitions

Une application linéaire de E vers F est une application qui "respecte" la structure d'espace vectoriel de ces deux espaces.

Définition 1.1. *Une application f de E dans F est dite linéaire lorsqu'elle vérifie :*

$$\forall(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})\in E^2,\ \forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2,\quad f(\lambda_1.\overrightarrow{u_1}+\lambda_2.\overrightarrow{u_2})=\lambda_1.f(\overrightarrow{u_1})+\lambda_2.f(\overrightarrow{u_2})\ .$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.

Remarque 1.2. *En particulier, si f est linéaire, $f(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2})=f(\overrightarrow{u_1})+f(\overrightarrow{u_2})$ (il suffit de prendre $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=1$ dans la définition) et $f(\lambda.\overrightarrow{u})=\lambda.f(\overrightarrow{u})$ (il suffit de prendre $\lambda_2=0$ dans la définition).*

Vocabulaire :

- Une application linéaire est aussi appelée morphisme entre espaces vectoriels. Ce terme est générique pour désigner les applications qui respectent les structures algébriques.
- Si $F=E$, une application linéaire $f:E\to E$ est appelée endomorphisme. On note alors $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme.
- Une endomorphisme bijectif est appelée automorphisme.

Exemples 1.3. *Montrer que les applications suivantes sont linéaires :*

1. $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ *définie par* $g(x,y,z)=(x-2y+5z,-x+3z)$;
2. $g:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$ *définie par* $g(P)=P+P'$;
3. *Étant donnée* $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $g:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *définie par* $g(M)=AM$.

Propriété 1.4. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :*

- $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$
- *pour tout $n \geq 1$, on a :* $\forall(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}) \in E^n,\ \forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{u_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.f(\overrightarrow{u_i}).$

Démonstration :

1.2 Combinaison linéaire et composée d'applications linéaires

Dans l'ensemble des applications (pas forcément linéaires) de E dans F, noté $\mathcal{F}(E, F)$, on peut définir une addition, en posant, pour f et g dans $\mathcal{F}(E, F)$,

$$(f + g)(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{u})\ ;$$

et la multiplication par un réel, en posant, pour f dans $\mathcal{F}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda.f)(\overrightarrow{u}) = \lambda.f(\overrightarrow{u})\ .$$

On vérifie que $\mathcal{F}(E, F)$, muni de ces opérations, est un espace vectoriel. Le vecteur nul est l'application qui à tout élément de E associe $\overrightarrow{0_F}$.

Propriété 1.5. *Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ et λ et μ deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ est une application linéaire.*

Démonstration :

Reformulation : En d'autres termes, comme l'application nulle est clairement linéaire, $\mathcal{L}(E, F)$ est un SEV de $\mathcal{F}(E, F)$.

La linéarité des applications est également préservées par la composition.

Propriété 1.6 (Composition).

- *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires, alors $g \circ f : E \to G$ est linéaire.*
- *Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors sa réciproque f^{-1} est un isomorphisme.*

Démonstration :

Définition 1.7. *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. On définit par récurrence la composée p fois de f par :*

$$f^0 = id_E \quad ; \ \forall p \in \mathbb{N},\ f^{p+1} = f \circ f^p \ .$$

2 Image et noyau d'une application linéaire

Dans cette partie f désigne un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

2.1 Noyau

L'ensemble des antécédents par f de $\overrightarrow{0_F}$ jouera un rôle important.

Définition 2.1. *On appelle noyau de f, noté* $\mathrm{Ker}(f)$ *l'ensemble :*

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_F} \right\} \ .$$

Propriété 2.2. *Le noyau de f est un SEV de E.*

Démonstration :

Exemples 2.3. *Déterminer une base du noyau de chacune des applications linéaires suivantes :*

1. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $g(x, y, z) = (x - 2y + 5z, -x + 3z)$;
2. $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ *définie par* $g(P) = P + P'$.

Propriété 2.4. *L'application f est injective ssi* $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Démonstration :

2.2 Image

Dans le cadre des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on notait $f(I)$ l'ensemble des images des éléments d'un intervalle I par f ; dans le cadre des applications linéaires, on adopte une notation particulière.

Définition 2.5. *On appelle image de f, noté* $\mathrm{Im}(f)$ *l'ensemble des images des éléments de E par f :*

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\overrightarrow{u}),\ \overrightarrow{u} \in E\}\ .$$

Remarques 2.6.

- *On a :* $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \overrightarrow{u} \in E\ ,\ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.
- *Par définition, f est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.

Propriété 2.7. $\mathrm{Im}(f)$ *est un SEV de F.*

Démonstration :

2.3 Rang d'une application linéaire

Propriété 2.8. *Soit $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. Alors*

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(\overrightarrow{e_1}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n}))\ .$$

Démonstration :

<u>**Base de l'image**</u> : La propriété précédente permet d'obtenir une partie génératrice mais pas en général une base de l'image. Il faut alors "extraire" de cette partie génératrice une base. Nous le ferons uniquement dans des cas particuliers ne nécessitant que des calculs simples.

Définition 2.9. *Comme* $\mathrm{Im}(f)$ *est un SEV de* F *qui est de dimension finie,* $\mathrm{Im}(f)$ *est de dimension finie. On appelle rang de* f *la dimension de l'image de* f *:* $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$*.*

Remarque 2.10. *D'après la proposition précédente, le rang de* f *est donc, étant donnée une base* $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ *de* E*, le rang de la famille de vecteurs* $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n}))$ *(d'où le choix du terme).*

Exemple 2.11. *Déterminer le rang de* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $g(x, y, z) = (x - 2y + 5z, -x + 3z)$

2.4 Image de familles particulières

Propriété 2.12.

- *Si* f *est injective, l'image par* f *d'une famille libre est une famille libre. En particulier, on a alors* $\dim(E) \leq \dim(F)$*.*
- *Si* f *est surjective l'image par* f *d'une famille génératrice de* E *est une famille génératrice de* F*. En particulier, on a alors* $\dim(E) \geq \dim(F)$*.*
- *Si* f *est un isomorphisme, alors l'image par* f *d'une base de* E *est une base de* F*. En particulier,* E *et* F *ont alors même dimension.*
- *Si* f *est un isomorphisme, et si* $(u_1, \dots, u_m)$ *est une famille de vecteurs de* E *de rang* l*, alors le rang de la famille* $(f(u_1), \dots, f(u_m))$ *est* l*.*

Démonstration :

2.5 Théorème du rang

Les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire sont reliées :

Théorème 2.13 (Théorème du rang, admis)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors*

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)\ .$$

Exemple 2.14. *Retrouver le rang de $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y, z) = (x - 2y + 5z, -x + 3z)$*

On a vu plus haut que si E et F sont isomorphes, alors ils ont même dimension. Réciproquement, si E et F ont même dimension, on déduit du théorème du rang une propriété importante :

Corollaire 2.15. *On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$ (ce qui est le cas lorsque f est un endomorphisme). On a alors équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *f est injective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est bijective.*

Démonstration :

Exemple 2.16. *Montrer que $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $g(P) = P + P'$ est un isomorphisme.*

3 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

On désigne par $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.

3.1 Définition

On commence par le cas d'un unique vecteur (qui sera fréquemment utilisé).

Cas particulier d'un seul vecteur :
Étant donné $\overrightarrow{u} \in E$, la matrice (colonne) représentant $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notée $M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u})$, ayant sur sa i-ème ligne la coordonnées de $\overrightarrow{u}$ selon $\overrightarrow{e_i}$.

Exemple 3.1. *Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}'$ la base $((1,1),(-1,1))$. Écrire la matrice de $\overrightarrow{u}$ dans chacune des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.*

Remarque 3.2. *L'application $\overrightarrow{u} \mapsto M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u})$ est un isomorphime d'espace vectoriels.*

Cas de plusieurs vecteurs :

Définition 3.3. *Étant donné m vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m}$ de E, la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}$ ayant dans sa j-ème colonne les coordonnées de $\overrightarrow{u_j}$ dans $\mathcal{B}$ est appelée la matrice de $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m}$ dans $\mathcal{B}$, notée $M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m})$.*

Propriété 3.4 (admise)**.** *Une famille de vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m}$ de E et la matrice $M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m})$ les représentant dans une base quelconque ont même rang.*

3.2 Changement de base

Un des points essentiels de la suite du cours sera le changement de la base dans laquelle on exprime les coordonnées des vecteurs.

Définition 3.5 (Matrice de passage entre deux bases)**.** *Si $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_n}')$ est une autre base de E, on appelle matrice de de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice*

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_n}') \ .$$

La j-ème colonne de cette matrice est donc constituée des coordonnées de $\overrightarrow{e_j}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

En pratique :
On retiendra cela sous la forme suivante : la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes sont constituées des coordonnées, dans la base $\mathcal{B}$, des vectuers de la base $\mathcal{B}'$.

Cette matrice permet d'obtenir les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$ à partir de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$:

Propriété 3.6 (Première formule de changement de base, admise)**.** *Étant donné $\overrightarrow{u} \in E$, et avec les notations qui précèdent,*

$$M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \ M_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{u}) \ .$$

Remarque 3.7. *On pourra retenir cela sous la forme suivante : en notant X la matrice des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$ (ancienne base), X' sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ (nouvelle base) et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors on a :*

$$X = PX' \ .$$

Exemple 3.8. *Reprendre l'exemple 3.1 et vérifier la validité de la formule sur cet exemple.*

4 Matrice d'une application linéaire

On suppose dans cette partie que f un élément de $\mathcal{L}(E,F)$

4.1 Définition

Rappelons que la matrice associée à une famille $(\overrightarrow{u_1},\ldots,\overrightarrow{u_m})$ de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes contiennent les coordonnées de ces vecteurs dans cette base, notée $M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1},\ldots,\overrightarrow{u_m})$.

Définition 4.1. *On se donne une base $\mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ de E et une base $\mathcal{B}'=(\overrightarrow{e_1}',\ldots,\overrightarrow{e_p}')$ de F. On appelle matrice de f dans ces bases, notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice qui contient dans ses colonnes les coordonnées (dans la base $\mathcal{B}'$) des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ c'est à dire :*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=M_{\mathcal{B}'}\left(f(\overrightarrow{e_1}),\ldots,f(\overrightarrow{e_n})\right)\ .$$

Vu cette définition et la propriété 3.4, on a, avec les notations de la proprité précédente :

Propriété 4.2. *Le rang de $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est égal au rang de f.*

Exemples 4.3.

- *On définit $g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ par $g(x,y,z)=(x-2y+5z,-x+3z)$. Déterminer sa matrice A dans les bases canoniques. Vérifier alors la formule de la propriété précédente.*
- *On définit $g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ par $g(P)=P+P'$. Déterminer sa matrice B dans la base canonique.*
- *On définit $g\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par $g(M)=AM$, avec $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$. Déterminer sa matrice C dans la base canonique.*

L'intérêt de cette présentation est qu'elle permet de calculer l'image d'un vecteur quelconque par un simple calcul matriciel.

Propriété 4.4 (Admise). *Lorsque l'on multiplie la matrice des coordonnées d'un vecteur par la matrice de l'application linéaire, on obtient la matrice des coordonnées de l'image (tout ceci dans les bases adaptées). Plus précisément, en gardant les notations de la définition ci-dessus, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$*

$$M_{\mathcal{B}'}(f(\overrightarrow{u})) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\ M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u})$$

Remarque 4.5. *Dans le cas (fréquent) où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, en notant, dans la base $\mathcal{B}$, X les coordonnées $\overrightarrow{u}$, Y celles de $f(\overrightarrow{u})$ et A la matrice de f, on a :*

$$Y = AX\ .$$

Réciproquement, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}$, on définit bien une application linéaire g de E dans F en posant :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad M_{\mathcal{B}'}(g(\overrightarrow{u})) = A\ M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u})\ ;$$

on a alors

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)\ .$$

Lorsqu'il s'agit d'un endomorphisme ($F = E$) et que $\mathcal{B}$ est la base canonique, g est appelé endomorphisme canoniquement associé à A.
En pratique, on peut donc définir une application linéaire en donnant sa matrice (une fois les bases fixées).

Exemple 4.6. *Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.*
Calculer $g\left((1,-1,1)\right)$, puis, pour (x,y,z) quelconque, $g(x,y,z)$.

Remarque 4.7. *Si f est un endomorphisme et que la base de départ ($\mathcal{B}$) est la même que celle d'arrivée ($\mathcal{B}'$), on notera $M_{\mathcal{B}}(f)$.*

Propriété 4.8 (admise). *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E et A sa matrice dans une base $\mathcal{B}$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.*
Dans ce cas, la matrice de f^{-1} est A^{-1}.

Remarque 4.9. *On peut alors reformuler le corollaire 2.15 en termes matriciels. Une matrice carrée A est inversible (application linéaire associée bijective) ssi son rang est n (application linéaire associée surjective) ssi l'équation $AX = 0$ n'a pas de solution non nulle (application linéaire associée injective).*

4.2 Matrice d'une combinaison linéaire d'endomorphismes et d'une composée

Propriété 4.10 (Admise). *Soit f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f_1) + \lambda_2 M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f_2)\ .$$

Exemple 4.11. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice A dans la base canonique. Alors $f - 3Id_{\mathbb{R}^3}$ a pour matrice dans cette même base $A - 3I_3$.*

Il reste une propriété, très importante en pratique, concernant l'aspect matriciel de la composition des applications linéaires :

Propriété 4.12 (Admise)**.** *On se donne trois espaces vectoriels E, F et G de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires, on a vu qu'alors $g \circ f : E \to G$ est linéaire. On a de plus :*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\ .$$

Exemple 4.13. *Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ont pour matrices respectives A et B dans la base canonique. Alors $f \circ g$ a pour matrice dans cette même base AB.*

Corollaire 4.14 (Admis)**.** *On suppose que f est un endomorphisme ($E = F$) et que la base de départ ($\mathcal{B}$) est la même que celle d'arrivée ($\mathcal{B}'$). Alors on a, pour $k \geq 0$,*

$$M_{\mathcal{B}}(f^k) = (M_{\mathcal{B}}(f))^k\ .$$

4.3 Changement de base

Dans les exemples précédents, nous avons déterminé les matrices des applications linéaires dans les bases les plus simples. Mais pour certaines raisons que nous verrons dans le prochain chapitre, il peut être intéressant dans certaines situations de déterminer la matrice d'une application linéaire dans une autre base et de la relier à la matrice dans la base canonique (ou autre).
Dans ce paragraphe, f désigne un endomorphisme ($F = E$). On va considérer des matrices de f avec la même base au départ et à l'arrivée (ce sera le cas la plupart du temps dans les exercices). Plus précisément, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \ldots, \overrightarrow{e_n}')$ désignent des bases de E. Rappelons que l'on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
La première propriété concerne cette matrice de passage.

Propriété 4.15 (Admise)**.** *La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.*

Propriété 4.16 (Formule de changement de base, admise)**.** *Les matrices de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont liées par la relation suivante :*

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}\ M_{\mathcal{B}}(f)\ P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\ .$$

Remarque 4.17. *On pourra retenir cela sous la forme suivante : en notant A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (ancienne base), A' sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ (nouvelle base) et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors on a :*

$$A' = P^{-1}AP\ .$$

Définition 4.18. *Deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

Remarque 4.19. *D'après ce qui précède, deux matrices semblables peuvent être interprétées comme les matrices d'une même application dans deux bases différentes.*