

EDHEC 2024: Corrigé.

EXERCICE 1

1. (a) Soit $x \in [0, 1]$, et a, b les réels vérifiant l'égalité de l'énoncé. On a:

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{a(2+x) + b(2-x)}{4-x^2} = \frac{2(a+b) + (a-b)x}{4-x^2}.$$

Par identification des coefficients, on a $a-b=0$ et $2(a+b)=1$. On vérifie qu'on a alors $a=b=\frac{1}{4}$.

- (b) En utilisant la question précédente, on a:

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4(2-x)} dx + \int_0^1 \frac{1}{4(2+x)} dx \\ &= \frac{1}{4} \left([-\ln(2-x)]_0^1 + [\ln(2+x)]_0^1 \right) \\ &= \frac{\ln(2) + \ln(3) - \ln(2)}{4} \\ &= \frac{\ln(3)}{4}. \end{aligned}$$

2. Pour calculer u_1 , il suffit de remarquer qu'une primitive de $\frac{x}{4-x^2}$ est la fonction définie sur $[0, 1]$ par $x \mapsto -\frac{\ln(4-x^2)}{2}$.
On a donc:

$$u_1 = \left[-\frac{\ln(4-x^2)}{2} \right]_0^1 = \frac{-\ln(3) + \ln(4)}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

3. (a) Pour tout entier n , on a:

$$\begin{aligned} 4u_n - u_{n+2} &= \int_0^1 \frac{4x^n}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

- (b) D'après la question précédente, on a pour tout entier n : $u_{n+2} = 4u_n - \frac{1}{n+1}$. Le programme calcule les termes de u_n par récurrence en incrémentant n de 2 à chaque étape.

Si n est pair, on calcule u_n en utilisant la formule de récurrence et en partant de u_0 . Si n est impair, on fait de même en partant de u_1 .

```
def suite(n):
    if (-1)**n == 1 :
        u=np.log(3)/4
        for k in range(2, n+1, 2) :
            u = 4*u-1/(n-1)
    else :
        u=np.log(2/np.sqrt(3))
        for k in range(3, n+1, 2) :
            u = 4*u-1/(n-1)
    return u
```

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a:

$$3 \leq 4 - x^2 \leq 4$$

Par décroissance de la fonction inverse puis en multipliant par $x^n \in [0, 1]$, on obtient:

$$\frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq \frac{x^n}{3}.$$

Par positivité de l'intégrale, on a donc:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3} dx.$$

On en déduit que:

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}.$$

- (b) La suite (u_n) est encadrée par les suites $\left(\frac{1}{4(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{3(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent toutes les deux vers 0. D'après le théorème d'encadrement, on conclut que la suite (u_n) converge aussi vers 0.
- (c) D'après la question 4)a), la suite (u_n) est minorée par la suite $\left(\frac{1}{4(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, $\frac{1}{4(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{4n}$ qui est le terme général d'une série divergente. Par comparaison de séries à terme positifs on en déduit que $\sum \frac{1}{4(n+1)}$ puis $\sum u_n$ divergent.
5. (a) Ce programme affiche les points de coordonnées $(n, 3nu_n)$ pour n allant de 0 à 40. On voit que l'ordonnée des points s'approche de 1 et on conjecture donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3nu_n = 1$, c'est-à-dire $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{3n}$.
- (b) Soit f et g les fonctions définies sur $[0, 1]$ par:

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{1}{4-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et leurs dérivées sont données par:

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} \quad \text{et} \quad g'(x) = x^n.$$

D'après la formule d'intégration par partie, on a alors:

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)} \right]_0^1 - \frac{2}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx. \end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En procédant de la même manière qu'à la question 4)a), on peut montrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9} dx.$$

On a alors:

$$\frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \frac{1}{9(n+3)}.$$

Comme $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}$ est encadrée par des termes qui convergent vers 0, on peut conclure que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} = 0$$

6. On a:

$$3nu_n = \frac{3n}{3(n+1)} - \frac{6n}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

- Le terme $\frac{3n}{3(n+1)}$ converge vers 1.
- Le terme $\frac{6n}{(n+1)}$ converge vers 6 donc par produit et d'après la question précédente, le terme $\frac{6n}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}$ converge vers 0.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3nu_n = 1$ et donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{3n}$ conformément à la conjecture de la question 5)a).

EXERCICE 2

1. (a) • **Positivité** Remarquons d'abord que la fonction f est clairement positive sur $\mathbb{R}$.
- **Continuité** La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme composée des fonction $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto e^x$. La fonction f est donc continue sur $[0, +\infty[$ comme produit de la fonction précédente par x . La fonction f est également continue sur $]-\infty, 0[$ car constante. Nous en déduisons que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (Cela suffit pour montrer que f est une densité).
- **Intégrale** Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Soit $x \in [0, +\infty]$. On a:

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x = -e^{-\frac{x^2}{2}} + 1.$$

On a alors:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 = 1.$$

La fonction f peut donc être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X .

- (b) Soit N une variable aléatoire suivant une loi normale centrée, réduite. On a $E(N) = 0$ et $V(N) = 1$. D'après le théorème de Koenig-Huygens, comme N admet une variance elle admet également un moment d'ordre deux et on a

$$E(N^2) = E(N)^2 + V(N) = 1.$$

- (c) Pour montrer que X admet une espérance, il faut montrer que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

est une intégrale absolument convergente. D'après la question précédente, on sait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} E(N^2) = \sqrt{2\pi}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$. Remarquons que la fonction g est paire. On a donc, en faisant le changement de variable $t = -u$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x g(t) dt = - \int_0^{-x} g(-u) du = \int_{-x}^0 g(u) du.$$

On a donc:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-x}^x g(t) dt = \int_{-x}^0 g(t) dt + \int_0^x g(t) dt = 2 \int_0^x g(t) dt.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} g(t) dt.$$

On en déduit que X admet une espérance et que:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2. D'après le cours, on a:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, $F_X(x)$ est nulle si $x < 0$. Si $x \geq 0$, on a, en reprenant les calculs de la question 1a):

$$F_X(x) = \int_0^x f(t) dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ainsi on a:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. (a) Si $x < 0$, on a $F_Z(x) = P(X^2 \leq x) = 0$ car X^2 ne peut pas prendre de valeurs négatives. Si $x \geq 0$, on a:

$$F_Z(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}.$$

On en déduit que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

(b)

```
def simulX() :
    Z = rd.exponential(2)
    return np.sqrt(Z)
```

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\frac{X}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P(X \leq \sqrt{n}x) = F_X(\sqrt{n}x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On reconnaît (sauf en $x = 0$) la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi certaine et prenant la valeur 0. La variable Y_n converge donc en loi vers une variable aléatoire suivant une telle loi.

- (c) Soit $\varepsilon > 0$. On a:

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = 1 - P(|Y_n| \leq \varepsilon) = 1 - P(-\varepsilon \leq Y_n \leq \varepsilon) = 1 - (G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)) = 1 - G_n(\varepsilon) = e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}.$$

La troisième égalité provenant du fait que comme $-\varepsilon < 0$, $G_n(-\varepsilon) = 0$. On a alors bien: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$.

Remarque : On aurait également pu répondre à cette question en utilisant l'inégalité de Markov.

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. et $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $[M_n > x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i > x]$. Comme les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont supposées mutuellement indépendantes, on a:

$$P(M_n > x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > x]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i > x).$$

Comme les variables $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes la même loi que X , on peut écrire :

$$P(M_n > x) = P(X > x)^n = (1 - F_X(x))^n.$$

On a alors:

$$F_{M_n}(x) = 1 - P(M_n > x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = G_n(x).$$

Les variables M_n et Y_n ayant la même fonction de répartition, elles suivent la même loi.

(b)

```
def simulM(n) :
    X = np.array([simulX() for k in range(n)])
    M = np.min(X)
    return M
```

EXERCICE 3

1. Faisons le changement de variable $u = x - t$. On a alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t) dt = 1 - \int_x^0 (x-u) f(u) du = 1 + \int_0^x (x-u) f(u) du.$$

2. (a) Développons l'expression obtenue à la question précédente par linéarité de l'intégrale:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u) du = 1 + x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du.$$

D'après le cours:

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x f(u) du$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f(x)$.
- La fonction $x \mapsto x f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x u f(u) du$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x f(x)$.

On en déduit que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u) du + x \left(\int_0^x f(u) du \right)' - \left(\int_0^x u f(u) du \right)' = \int_0^x f(u) du + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(u) du.$$

(b) On utilise les mêmes arguments que précédemment: la fonction f' est définie comme une intégrale de la fonction continue f donc f' est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \left(\int_0^x f(u) du \right)' = f(x).$$

(c) Notons $(E) : y'' = y$ l'équation différentielle de la question précédente. Cette équation a pour équation caractéristique $x^2 - 1 = 0$ dont les racines sont données par 1 et -1. D'après le cours, les solutions de (E) sont de la forme:

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(d) Commençons par déterminer $f(0)$ et $f'(1)$.

- D'après la question 1), on a $f(0) = 1 + \int_0^0 t f(x-t) dt = 1$.
- D'après la question 2)a), on a $f'(0) = \int_0^0 f(u) du = 0$.

D'après la question précédente, f peut s'écrire $f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a donc, en remplaçant $f(0)$ et $f'(0)$ par leurs expressions:

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \lambda - \mu &= 0 \end{cases}$$

On vérifie qu'on a alors $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ et donc:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x t f(x-t) dt &= 1 + \int_0^x t \frac{e^{x-t} + e^{-x+t}}{2} dt \\ &= 1 + \frac{e^x}{2} \int_0^x t e^{-t} dt + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x t e^t dt \end{aligned}$$

Calculons les intégrales de l'expression. Les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = -e^{-t},$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont données par:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v'(t) = e^{-t}.$$

D'après la formule d'intégration par parties, on a alors:

$$\int_0^x t e^{-t} dt = [-t e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt = -x e^{-x} + [-e^{-t}]_0^x = -(x+1)e^{-x} + 1.$$

On peut, en procédant de la même manière, montrer que:

$$\int_0^1 t e^t dt = (x-1)e^x + 1.$$

On a alors:

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x t f(x-t) dt &= 1 + \frac{e^x}{2} (-(x+1)e^{-x} + 1) + \frac{e^{-x}}{2} ((x-1)e^x + 1) \\ &= 1 + \frac{-(x+1)}{2} + \frac{(x-1)}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

L'égalité a bien été vérifiée.

4. Entre cette question et la question 1), la fonction f diffère d'une constante. Cela implique que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u) du \quad \text{et} \quad f''(x) = f(x).$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle (E) et s'écrit donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Ici les conditions initiales sont données par $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Les coefficients λ et μ doivent donc vérifier le système: $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$ On a donc $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, l'unique solution de cette équation est donnée par $f = 0$.

PROBLÈME

1. (a) La variable X_0 correspond au nombre de boules blanches présentes dans A initialement. D'après l'énoncé, on a $X_0 = 1$ et donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.
- (b) Comme il peut y avoir 0, 1 ou 2 boules blanches, on a $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

- On a $X_1 = 0$ si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule blanche dans l'urne A et une boule noire dans l'urne B . Chaque tirage étant indépendant, on a :

$$a_1 = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- On a $X_1 = 2$ si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule noire dans l'urne A et une boule blanche dans l'urne B . Chaque tirage étant indépendant, on a :

$$c_1 = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- Comme $X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, $([X_1 = 0], [X_1 = 1], [X_1 = 2])$, est un système complet d'évènement et on a donc :

$$b_1 = P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise les mêmes arguments que précédemment: il y a dans l'urne 0, 1 ou deux boules blanches donc on a $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. D'après le cours, $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est donc un système complet d'évènement.
- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est un système complet d'évènement, on a :

$$a_n + b_n + c_n = P([X_n = 0]) + P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) = 1.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'évènement $(X_n = 0)$ soit réalisé. Dans ce cas l'urne A contient deux boules noires et l'urne B contient forcément deux boules blanches. Le tirage va donc forcément aboutir à ce que chaque urne contienne une boule noire et une boule blanche. On a donc :
- $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0$.
 - $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1$.
 - $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$.

Supposons maintenant que l'évènement $(X_n = 1)$ soit réalisé. On est alors dans la même situation qu'avant le premier tirage. On a donc :

- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$.
- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$.
- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}$.

Supposons maintenant que l'évènement $[X_n = 2]$ soit réalisé. On est alors dans une situation symétrique à celle où $[X_n = 0]$, où les rôles des boules noires et des boules blanches sont inversées. On a alors :

- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0$.
- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = 1$.
- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0$.

Ces probabilités correspondent bien aux poids des arêtes du graphe donné dans l'énoncé.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$M = (P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)_{(i,j) \in [0,2]^2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La somme des éléments de chaque ligne de la matrice est bien égal à 1 (on dit que la matrice M est stochastique).

(c) D'après la question **1)c** , $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est un système complet d'évènement. On peut alors utiliser la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(X_{n+1} = 0) \\ &= P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) \\ &= \frac{b_n}{4}. \\ b_{n+1} &= P(X_{n+1} = 1) \\ &= P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) \\ &= a_n + \frac{b_n}{2} + c_n. \\ c_{n+1} &= P(X_{n+1} = 2) \\ &= P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) \\ &= \frac{b_n}{4}. \end{aligned}$$

3. Rappelons qu'on a $(a_0, b_0, c_0) = (0, 1, 0)$ et $(a_1, b_1, c_1) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Vérifions les relations de la question précédente:

- $\frac{b_0}{4} = \frac{1}{4} = a_1 = c_1$,
- $a_0 + \frac{b_0}{2} + c_0 = \frac{1}{2} = b_1$.

Les relations de la question précédente sont donc bien vérifiées.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord que X_{n+1} étant une variable aléatoire finie, l'espérance est bien définie. On a:

$$E(X_{n+1}) = 0 \times P(X_{n+1} = 0) + 1 \times P(X_{n+1} = 1) + 2 \times P(X_{n+1} = 2) = b_{n+1} + 2c_{n+1}.$$

(b) Remarquons que d'après la question **2)c**, on a $a_{n+1} = c_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1} = b_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1} = 1.$$

(c) Si $n \in \mathbb{N}^*$, cette relation se déduit immédiatement des deux questions précédentes. Si $n = 0$, on a $b_0 + 2c_0 = 1 + 2 \times 0 = 1$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord que:

$$U_n V = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2a_n - b_n + 2c_n$$

On a alors:

$$U_{n+1} V = 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} = 2\frac{b_n}{4} - a_n - \frac{b_n}{2} - c_n + 2\frac{b_n}{4} = -a_n + \frac{b_n}{2} - c_n = \frac{-1}{2}(2a_n - b_n + c_n) = \frac{-1}{2}U_n V.$$

La suite $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{-1}{2}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, on a $2a_n - b_n + 2c_n = U_n V$. Or, on a montré que $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ et de premier terme $U_0 V = -1$. On en déduit que:

$$2a_n - b_n + 2c_n = U_n V = -\left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après les questions **1)a** et **2)c** que $a_n = c_n$ pour tout entier n . D'après la question **4)c**, on a $b_n = 1 - 2c_n = 1 - 2a_n$. D'après la question **5)b**, on a alors:

$$-\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 2a_n - b_n + 2c_n = 2a_n - (1 - 2a_n) + 2a_n = 6a_n - 1$$

On en déduit que $a_n = c_n = \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{6}$.

On déduit ensuite que $b_n = 1 - 2a_n = 1 - \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{3} = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 2}{3}$. Les valeurs de a_n , b_n et c_n nous permettent de déduire directement la loi de X_n .

7. Comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit d'étudier les limites des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a alors:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{6} = \frac{1}{6}. \\ \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 2}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont la loi est donnée par:

$$(P(X=0), P(X=1), P(X=2)) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

8. (a) On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors l'égalité de l'énoncé:

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = 2M^3.$$

(b) On déduit de la question précédente que le polynôme $P(X) = 2X^3 - X^2 - X$ est annulateur de M .

Déterminons les racines de P . On a $P(X) = X(2X^2 - X - 1)$ donc il suffit de déterminer les racines de $2X^2 - X - 1$. Le discriminant de $2X^2 - X - 1$ est donné par $\Delta = 9$ et les racines sont données par $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. D'après les cours, on a alors que $\text{Sp}(M) \subset \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$. Il reste alors à vérifier si chacune des racines λ de P est valeur propre ou pas de M .

• **Cas $\lambda = -\frac{1}{2}$.** Déterminons le rang de $M + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Notons L_1 , L_2 et L_3 les trois lignes de la matrice. On remarque qu'on a $L_1 + L_3 = 2L_2$ sans pour autant que les trois lignes soient colinéaires. On en déduit que $\text{rg}(M + \frac{1}{2}I_3) = 2$, que la matrice $M + \frac{1}{2}I_3$ n'est donc pas inversible et $-\frac{1}{2}$ est une valeur propre de M .

• **Cas $\lambda = 0$.** Déterminons le rang de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La première et la troisième ligne sont égales et ne sont pas colinéaires à la seconde, on a donc $\text{rg}(M) = 2$. La matrice M n'est donc pas inversible et 0 est une valeur propre de M .

• **Cas $\lambda = 1$.** Déterminons le rang de $M - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Remarquons qu'on a $L_1 + L_3 = -4L_2$ sans que les trois lignes soient colinéaires, on a donc $\text{rg}(M - I_3) = 2$. La matrice $M - I_3$ n'est donc pas inversible ce qui prouve que 1 est valeur propre de M .

On donc $\text{Sp}(M) = \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$. De plus pour chaque valeur propre λ , on a montré que $\text{rg}(M - \lambda I_3) = 2$. D'après le théorème du rang, cela implique que $\dim E_\lambda = 1$. Ainsi pour trouver une base de chaque sous-espace propre, il suffit de trouver un vecteur propre.

- **Base de $E_{-\frac{1}{2}}$.** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{2}}$. Le triplet (x, y, z) est alors solution du système

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 0 \\ \frac{x}{4} + y + \frac{z}{4} = 0 \\ y + \frac{z}{2} = 0 \end{cases}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les solutions de ce système sont de la forme $(-2y, y, -2y)$ où $y \in \mathbb{R}$. Une base de $E_{-\frac{1}{2}}$ est donc donné par $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

- **Base de E_0 .** On vérifie que $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ est une base de E_0 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- **Base de E_1** On vérifie que $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base de E_1 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Remarque: Pour les cas de E_0 et E_1 , le lecteur peut résoudre un système si il n'arrive pas à trouver immédiatement les vecteurs propres (mais cela prend un peu plus de temps). Pour gagner du temps et trouver les vecteurs propres sans avoir à résoudre un système, lecteur pourrait remarquer que les colonnes de la matrice P de la question suivante donne les potentiels vecteurs propres.

- (c) Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de P . D'après la question précédente, ces vecteurs sont des vecteurs propres de valeurs propres distinctes et forment alors une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On en conclut que $\text{rg}(P) = 3$ et que la matrice P est donc inversible.
- (d) On a d'une part

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et d'autre part

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc bien $MP = PD$. Comme P est inversible, cela implique que $M = PDP^{-1}$ et donc que M est diagonalisable.

- (e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$U_n M = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_n}{4} & a_n + \frac{b_n}{2} + c_n & \frac{a_n}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

- (f) Montrons cette égalité par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $U_0 M^0 = U_0 I_3 = U_0$. L'égalité est bien vérifiée.
- **Hérédité.** Soit n un entier tel que $U_n = U_0 M^n$. Alors, en utilisant la question précédente, on a:

$$U_{n+1} = U_n M = U_0 M^n M = U_0 M^{n+1}.$$

- **Conclusion.** L'égalité est vraie pour $n = 0$ et l'hérédité a été démontrée, on a donc bien que pour tout entier n , $U_n = U_0 M^n$.

- (g) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de a_n, b_n et c_n , la loi de X_n est donnée par les coefficients de U_n , Il suffit donc de calculer $U_0 M^n$.

- Remarquons que comme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, il suffit de calculer la seconde ligne de M^n .
- Ensuite, en utilisant la question **8)d)**, on peut démontrer par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$.
- Enfin, après avoir déterminé P^{-1} par l'algorithme du pivot de Gauss, on peut trouver par le calcul la seconde ligne de M^n .