# RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

L'objectif de la réduction des endomorphisme est d'expliquer comment l'on peut écrire certaines matrices $A$ sous la forme $A = PDP^{-1}$, où $D$ est diagonale. On a vu dans des exercices que cette écriture permet (entre autres) de calculer les puissances de $A$. Une des applications est l'étude des chaînes de Markov, mais ces résultats ont de nombreuses autres applications dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées.

Dans tout ce chapitre, $E$ désigne un espace vectoriel de dimension finie $n$, $\mathcal{B}$ une base de $E$.

## 1 Éléments propres d'un endomorphisme

### 1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

**Définition 1.1.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- *Un nombre réel $\lambda$ est appelé valeur propre de $f$ lorqu'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ de $E$ tel que :*
$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda\ \overrightarrow{u}\ .$$
*Un tel vecteur est alors appelé vecteur propre associé à $\lambda$.*
- *Un nombre réel $\lambda$ est appelé valeur propre de $A$ lorqu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :*
$$X \neq 0_{n,1} \quad \text{et} \quad A\ X = \lambda\ X\ .$$
*Un tel vecteur est alors appelé vecteur propre associé à $\lambda$.*
- *L'ensemble des valeurs propres de $f$ (resp. de $A$) est appelé spectre de $f$ (resp. de $A$) et noté* $\mathrm{Sp}(f)$ *(resp* $\mathrm{Sp}(A)$*).*

**Remarque 1.2.** *On notera que $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\ \overrightarrow{u}$ est équivalent à $(f - \lambda\ \mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_E}$ et que $A\ X = \lambda\ X$ est équivalent à $(A - \lambda I_n)\ X = 0_{n,1}$.*

**Exemples 1.3.**
1. *Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ l'endomorphisme défini par $g(P) = (X-1)P' + P$. Montrer que $R(X) = (X-1)^2$ est un vecteur propre et déterminer la valeur propre associée.*
2. *Soit $B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $X$ est un vecteur propre et déterminer la valeur propre associée.*

**Remarque 1.4.** *Dans les exemples précédents, les vecteurs propres sont donnés. Se pose la question de la détermination des éléments propres sans indication. Pour cela - dans le cas matriciel mais il en est de même pour un endomorphisme - il faut déterminer les valeurs de $\lambda$ telles que l'équation $AX = \lambda X$ ait une solution non nulle. On se retrouve à résoudre un système d'équations linéaires avec un paramètre ($\lambda$), ce qui est en général techniquement compliqué. Nous verrons des exemples en TD.*

**Propriété 1.5.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ si et seulement si la matrice colonne représentant $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$. Par conséquent, $A$ et $f$ ont exactement les mêmes valeurs propres.*

**Démonstration :**

**Propriété 1.6.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- *Le réel $\lambda$ est une valeur propre de $f$ si et seulement si $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif (ce qui est équivalent à dire que $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijectif).*
- *Le réel $\lambda$ est une valeur propre de $A$ si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.*

**Démonstration :**

Un cas particulier important :

**Corollaire 1.7.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- 0 *est une valeur propre de $f$ si et seulement si $f$ n'est pas injectif (ce qui est équivalent à dire que $f$ n'est pas bijectif).*
- 0 *est une valeur propre de $A$ si et seulement si $A$ n'est pas inversible.*

**Propriété 1.8** (Valeurs propres d'une matrice triangulaire)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que la matrice $A$ est triangulaire. Alors les valeurs propres de $A$ sont les éléments de sa diagonale.*

**Démonstration :**

**Propriété 1.9** (Valeurs propres d'une matrice semblable à une matrice diagonale)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$.*
*Alors les valeurs propres de $A$ sont les $d_i$ (avec possible égalité de plusieurs d'entre eux) et pour chauqe $i$ $PE_{ii}$ est un vecteur propre associéà $d_i$.*

**Démonstration :**

## 1.2 Sous-espaces propres

**Lemme 1.10.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *On note $E_\lambda(f) = \{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}\}$. Alors $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ ; en particulier, $E_\lambda(f)$ est un SEV de $E$.*
- *On note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ (A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}\}$. $E_\lambda(A)$ est un SEV de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

**Démonstration :**

**Remarque 1.11.** *On parle parfois (abusivement) de noyau d'une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ au lieu du noyau de l'application (linéaire) qui à $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ associe $BX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (application "multiplication matricielle") ; on note alors* Ker $(B)$*. Avec cette notation, on peut écrire $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda I_n)$.*
*De manière général, le vocabulaire pour les matrices est "parallèle" à celui pour les applications linéaire (vecteur propre, valeur propre ...) est en fait le même si l'on considère l'application qui à $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

**Remarque 1.12.** *Quel que soit $\lambda$, $\overrightarrow{0_E} \in E_\lambda(f)$ (resp. $0_{n,1} \in E_\lambda(A)$). Dire que $\lambda$ est valeur propre signifie qu'il y a d'autres éléments dans $E_\lambda(f)$ (resp. $E_\lambda(A)$).*

**Définition 1.13.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- *Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$. Le SEV $E_\lambda(f)$ est appelé <u>sous espace propre</u> associé à $\lambda$.*
- *Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$. Le SEV $E_\lambda(A)$ est appelé <u>sous espace propre</u> associé à $\lambda$.*

**Exemple 1.14.** *On reprend* $B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$. *On a vu que 1 en était valeur propre. Déterminer* $E_1(B)$.

**Propriété 1.15.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Si* $\lambda$ *est valeur propre de* $A$*, alors la dimension du sous espace propre associé vérifie :*

$$dim(E_\lambda(A)) = n - rg(A - \lambda I_n) \ .$$

**Démonstration :**

## 2 Polynômes de matrices

Pour un polynôme $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$P(A) = a_i A^i \ .$$

On énonce les propriétés de ce paragraphe sur les matrices ; elles sont similaires pour des endomorphismes.
On aura besoin du point technique suivant.

**Lemme 2.1.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
*Si le réel* $\lambda$ *est une valeur propre de* $A$ *et* $X$ *un vecteur propre associé, alors, pour* $p \in \mathbb{N}$, $A^p \ X = \lambda^p \ X$.

**Démonstration :**

Cela a pour conséquence :

**Propriété 2.2.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et soit* $P$ *un polynôme.*
*Si* $\lambda$ *est une valeur propre de* $A$*, alors* $P(\lambda)$ *est une valeur propre de* $P(A)$.

**Démonstration :**

**Définition 2.3.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un polynôme $P$ est dit annulateur pour $A$ lorsque $P(A) = 0_n$.*

**Propriété 2.4.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $P$ un polynôme annulateur de $A$.*
*Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $P(\lambda) = 0$.*

**Démonstration :**

**Exemple 2.5.** *On reprend* $B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que $B^2 - I_3 = 0_3$.*
2. *En déduire les valeurs propres possibles de $B$.*
3. *Déterminer l'ensemble des éléments propres de $B$.*

**Remarque 2.6.** *Là encore, on a donné une indications pour déterminer les valeurs propres.*

**Remarque 2.7.** *Attention, la réciproque de la propriété qui précède est fausse.*
*Exemple : dans l'exemple qui précède, on a aussi $B^3 - B = 0_3$ (on a multiplié par $B$ à gauche et à droite). Or $0$ est racine de $X^3 - X$ mais n'est pas valeur propre de $B$.*
*En pratique : une fois que l'on a montré qu'un polynôme $P$ est annulateur d'une matrice $A$ (ou d'un endomorphisme $f$), on détermine les racines de $P$. Celles-ci sont les valeurs propres possibles de $A$. Pour déterminer si un nombre $\lambda$, racine de $P$, est une valeur propre de $A$, on résout alors $AX = \lambda X$.*

# 3 Diagonalisation d'un endomorphisme

Rappelons que $E$ désigne un espace vectoriel de dimension finie $n$, $\mathcal{B}$ une base de $E$.

## 3.1 Définition de la diagonalisabilité

L'études des éléments propres a pour but de déterminer une base dans laquelle l'expression de $f$ est plus simple.

**Définition 3.1.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $f$ est diagonalisable lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.*

**Expression matricielle** : Supposons que $A$ est la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$. Supposons que $f$ est diagonalisable dans une base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ (ce qui signifie que $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ sont des vecteurs propres de $f$). Notons, pour $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i$ la valeur propre associée à $\overrightarrow{u_i}$ (toutes ne sont pas forcément distinctes). La matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ est alors :

$$D = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} .$$

Ceci explique le terme "diagonalisable" choisi. De plus, si l'on note $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a

$$D = P^{-1}AP .$$

**Définition 3.2.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice $A$ est dite diagonalisable lorsqu'il existe une matrice diagonale $D$ et un matrice inversible $P$ telles que*

$$A = PDP^{-1} .$$

**Exemple 3.3.** *On reprend la matrice $B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$ ; on note $g$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont $B$ est la matrice dans la base canonique.*

1. *Déterminer l'ensemble des éléments propres de $g$.*
2. *Pour chaque sous espace propre, on a déterminé une base. On prend les vecteurs (il peut y avoir plusieurs choix) de ces bases et on forme une famille avec (qui comporte 3 vecteurs). Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$.*
3. *En déduire que $g$ est diagonalisable.*
4. *Déterminer $D$ diagonale et $P$ inversible telles que $D = P^{-1}BP$*

Suite de l'exemple.

## 3.2 Critères de diagonalisabilité

Avant de donner des critères de diagonalisabilité, on donne une propriété importante des famille de vecteurs propres.

**Propriété 3.4** (admise)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de $f$ et $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_r}$ des vecteurs propres associés. Alors la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_r})$ est libre.*
*En particulier cela implique $r \leq n$.*

Ainsi, si $f$ admet $n$ valeurs propres distinctes, et si $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ sont des vecteurs propres associés, alors ils forment une base de $E$ et $f$ est diagonalisable. On obtient ainsi :

**Corollaire 3.5.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
*Si $f$ (resp. $A$) a $n$ valeurs propres distinctes, $f$ (resp. $A$) est diagonalisable.*

**Propriété 3.6** (admise)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de $f$ et $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ des bases respectives de $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$. On note $\mathcal{F}$ la famille formée par la réunion des éléments de ces bases. Alors $\mathcal{F}$ est libre.*

**Conséquence** : en dimension $n$, la somme des dimensions des sous-espaces propres est au plus $n$.

La propriété précédente nous permet d'établir le critère de diagonalisabilité suivant :

**Théorème 3.7.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de $f$ et $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_r}(f)$ les sous-espaces propres associés. Alors $f$ est diagonalisable si et seulement si :*

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = n \ .$$

*On a bien sûr la version matricielle :*
*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de $A$ et $E_{\lambda_1}(A), \dots, E_{\lambda_r}(A)$ les sous-espaces propres associés. Alors $A$ est diagonalisable si et seulement si :*

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n \ .$$

**Exemple 3.8.** *Si l'on reprend l'exemple du paragraphe précédente, ce théorème nous permet d'éviter de montrer que la famille formée à partir des bases des sous espaces propres est une base.*

Nous terminons avec un critère éloigné de ce qui précède et que nous admettrons.

**Propriété 3.9** (admise)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
*Si $A$ est symétrique (c'est à dire égale à sa transposée), alors $A$ est diagonalisable.*

## 3.3 Version uniquement matricielle d'une diagonalisation

Reprenons la matrice $B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$.

On se passe parfois de l'introduction de l'endomorphisme $g$ pour expliquer sa diagonalisation.
Si l'on demande de montrer que $B$ est diagonalisable et d'effectuer cette diagonalisation, on procède ainsi (après avoir déterminé les valeurs propres de $B$) :

- On détermine une base de chaque sous-espace propre de $B$.
- Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de $B$ vaut 3, on déduit du théorème précédent que $B$ est diagonalisable.
- On construit la matrice diagonale $D$ en mettant sur la diagonale les valeurs propres de $B$ (si $E_\lambda(A)$ est de dimension $d$, on met $d$ fois $\lambda$ sur la diagonale).
- On construit la matrice $P$ en mettant dans ses colonnes les vecteurs propres de $B$ (dans le même ordre que l'on a mis les valeurs propres sur la diagonale de $D$).
- On a alors $B = PDP^{-1}$.

Remarquons que cette méthode suit exactement ce que l'on fait en invoquant l'endomorphisme canoniquement associé à $B$. Elle peut paraître plus rapide, mais elle cache un peu l'aspect changement de base qui est à l'origine de cette diagonalisation.