

Corrigé du DS n°9

le 13/03/2026

Durée : 4h

- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
- Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
- On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1 :

1. f est un polynôme des 2 variables x et y et par conséquent f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .
2. (a) On a $\partial_1(f)f(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y$ et $\partial_2(f)f(x, y) = 4y^3 - 4y + 4x$.
- (b) Le gradient de f est $\nabla(f)(x, y) = (\partial_1(f)(x, y), \partial_2(f)(x, y)) = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x)$
Donc $\nabla(f)(x, y) = (0, 0)$ si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$
- (c) (x, y) est donc un point critique de f si, et seulement si,

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \underset{(L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2)}{\iff} \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ x^3 - x + y = 0 \end{cases}$$

Comme la fonction $x \rightarrow x^3$ est bijective, le système équivaut à :

$$\begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

f possède donc trois points critiques qui sont : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

3. (a) On a $\partial_{1,1}^2(f)(x, y) = 12x^2 - 4$, $\partial_{2,2}^2(f)(x, y) = 12y^2 - 4$ et $\partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y) = 4$.
- (b) Les matrices hessiennes de f sont donc :
 $H(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ et $H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$.
- (c) Les valeurs propres d'une matrice H sont les réels λ pour lesquels $H - \lambda I$ est non inversible.

— en $(0, 0)$:

$$H(0, 0) - \lambda I = \begin{pmatrix} -4 - \lambda & 4 \\ 4 & -4 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Ainsi, λ est valeur propre de $H(0; 0)$ ssi $(-4 - \lambda)^2 - 16 = 0 \iff 8\lambda - \lambda^2 = 0 \iff \lambda(8 + \lambda) = 0$.

Le réel 0 est donc valeur propre de $H(0; 0)$ et la méthode du cours ne permet pas de conclure quant à l'existence (ou non) d'un extrémum pour f au point $(0; 0)$.

— en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

$$H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - \lambda I = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \lambda I = \begin{pmatrix} 20 - \lambda & 4 \\ 4 & 20 - \lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi, λ est valeur propre de $H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ssi $(20 - \lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (20 - \lambda - 4)(20 - \lambda + 4) = 0 \Leftrightarrow (16 - \lambda)(24 - \lambda) = 0$.

Les 2 valeurs propres de $H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont donc 16 et 24, deux réels strictement positifs, ce qui permet de conclure que f admet donc en ces deux points un minimum local qui a pour valeur $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$.

(d) On a $f(x, x) = x^4 + x^4 - 2(x - x)^2 = 2x^4 \geq 0$ au voisinage de $x = 0$ (et même $f(x, x) > 0$ au voisinage de 0 si $x \neq 0$).

D'autre part $f(x, -x) = x^4 + (-x)^4 - 2(x + x)^2 = -8x^2 + 2x^4 = 2x^2(x^2 - 4) \leq 0$ au voisinage de $x = 0$ (et même $f(x, -x) < 0$ au voisinage de 0 si $x \neq 0$).

Comme $f(0, 0) = 0$ et f change de signe au voisinage de $(0, 0)$, on peut conclure que :

f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$.

4. (a) Pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 , On a :

$$\begin{aligned} f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2 &= x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy - x^4 + 4x^2 - 4 - y^4 + 4y^2 - 4xy \\ &= -8. \end{aligned}$$

(b) On a donc : $f(x, y) = -8 + (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 \geq -8$, pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 .

Et comme $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$, f admet un minimum GLOBAL en ces deux points.

5. (a) La fonction complétée :

```
def f(x, y):
    return x**4 + y**4 - 2*((x-y)**2)
```

(b) La première nappe est la seule où la fonction admet deux points où il y a un minimum (global) de même valeur et c'est donc la seule possible pour f .

Exercice 2

Partie I : Étude de la fonction f

1. La fonction $x \mapsto x$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* donc f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = +\infty$$

et, par croissances comparées, $f(x) \underset{x: +\infty}{\sim} x$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0	+
f	$+\infty$	\searrow	\nearrow
		1	$+\infty$

2. Sur $]0, 1[$, la fonction f est continue, strictement décroissante et ses limites aux bornes sont $+\infty$ et 1. Il suit du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]0, 1[$ vers $]1, +\infty[$. Puisque $2 \in]1, +\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0, 1[$ tel que $f(a) = 2$.

De même, sur $]1, +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et limites aux bornes sont 1 et $+\infty$. Il suit à nouveau du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]1, +\infty[$ vers $]1, +\infty[$. Puisque $2 \in]1, +\infty[$, il existe un unique réel $b \in]1, +\infty[$ tel que $f(b) = 2$.

Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$ et donc : L'équation $f(x) = 2$ n'admet que deux solutions sur \mathbb{R}_+^* : $a \in]0, 1[$ et $b \in]1, +\infty[$.

3. On a

$$f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 < 2,$$

$$f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 > 2.$$

La fonction f étant continue sur $[2; 4]$, il suit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x \in [2, 4]$ tel que $f(x) = 2$. Par unicité de la solution à cette équation sur $]1, +\infty[$, on a $x = b$ et donc :

$$b \in [2; 4].$$

Partie II : Étude d'une suite

1. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b, +\infty[$.

Initialisation : Si $n = 0$, on a $u_0 = 4$ de sorte que u_0 est bien défini et $u_0 = 4 \geq b$ d'après **3**.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \geq b$.

Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien défini. En outre, par croissance du logarithme, $\ln(u_n) \geq \ln(b) = b - 2$, la dernière égalité provenant du fait que $2 = f(b) = b - \ln(b)$. Ainsi, $u_{n+1} \geq b - 2 + 2 = b$ et donc $u_{n+1} \in [b, +\infty[$.

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq b.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - (u_n - \ln(u_n)) \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$

Mais $u_n \geq b$ d'après **4** et f est croissante sur $[b, +\infty[\subset]1, +\infty[$ d'après **1**. Ainsi, $f(u_n) \geq f(b) = 2$ et donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 2 - 2 = 0.$$

Ainsi,

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant minorée par b d'après **4**, elle converge vers une limite $\ell \geq b$.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ et en utilisant la continuité du logarithme, il vient

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

ou encore

$$f(\ell) = 2.$$

Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$, on a $\ell = b$.

En conclusion,

$$u_n \longrightarrow b.$$

3. (a) Considérons la fonction g définie sur $[b, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2$. C'est une fonction dérivable et, pour tout $x \geq b$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alors, puisque $b \geq 2$, on a :

$$\forall x \geq b, \quad g'(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}.$$

En outre, $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.

Il suit de l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &= g(u_n) - g(b) \\ &\leq \frac{1}{2}(u_n - b) \\ &= \frac{1}{2}(u_n - b). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b).$$

- (b) La suite (u_n) convergeant en décroissant vers b , on a déjà

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, puisque $b \in [2; 4]$ d'après **3**, il vient

$$u_0 - b = 4 - b \leq 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{0-1}}.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Alors, il suit de **6.a** que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &\leq \frac{1}{2}(u_n - b) \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

4. (a)

```
1. def suite(n):
2.     u = 4
3.     for i in range(n):
4.         u = np.log(u) + 2
5.     return b
```

(b) Nous nous appuyons ici sur la question **6.b** :

```

1. def valeur_approchee(epsilon):
2.     n = 0
3.     while (1/2)**(n-1) > epsilon :
4.         n = n+1
5.         u = suite(n)
6.     return u

```

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables

1. (a) La fonction H est de classe \mathcal{C}^2 sur V comme somme de fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur V , on peut donc calculer ses dérivées partielles premières et secondes. Ceci étant noté, on a :

$$\forall (x, y) \in V, \partial_1(H)(x, y) = x - y - 2 \quad \text{et} \quad \partial_2(H)(x, y) = -x + e^y.$$

(b) Soit $(x, y) \in V$. Si on note $\text{Crit}(H)$ l'ensemble des points critiques de H , on a

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in \text{Crit}(H) &\Leftrightarrow \text{grad}(H)(x, y) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ -x + e^y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x = e^y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ y = \ln(x) \quad (\text{car } x > 0) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \ln(x) = 2 \\ y = \ln(x) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ y = \ln(x) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{a, b\} \\ y = \ln(x) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow (x, y) \in \{(a, \ln(a)), (b, \ln(b))\}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Crit}(H) = \{(a, \ln(a)), (b, \ln(b))\}.$$

2. (a) Pour tout $(x, y) \in V$, la matrice hessienne est :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^y \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M_a = H(a, \ln(a)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

(b) Nous commençons par remarquer que la matrice M_a est symétrique donc diagonalisable.

On sait que, pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{sp}(M_a) &\Leftrightarrow M_a - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & a - \lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow (1 - \lambda)(a - \lambda) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - (a + 1)\lambda + (a - 1) = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme, noté $P_a(\lambda)$, est : $\Delta = (a + 1)^2 - 4(a - 1)$. Comme $a < 1$, $4(a - 1) > 0$ donc $\Delta > 0$.

On en déduit que ce polynôme a deux racines distinctes et donc M_a a deux valeurs propres distinctes. Notons les λ_1 et λ_2 .

La forme factorisée du polynôme (unitaire) ci-dessus est alors :

$$P_a(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

En développant, on obtient

$$P_a(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2;$$

et donc, par identification des coefficients,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= a + 1 \\ \lambda_1\lambda_2 &= a - 1. \end{cases} \quad rl$$

(c) On sait que $0 < a < 1$ donc $\lambda_1\lambda_2 = a - 1 < 0$ et les valeurs propres de M_a sont donc de signes opposés. Ainsi, H présente un point col en $(a, \ln(a))$.

3. En procédant comme à la question 14, on a

$$M_b = H(b, \ln(b)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

de sorte que M_b admet deux valeurs propres distinctes μ_1 et μ_2 satisfaisant :

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 &= b + 1 \\ \mu_1\mu_2 &= b - 1 \end{cases}$$

Puisque $b > 1$, on a $\mu_1\mu_2 > 0$ donc μ_1 et μ_2 sont toutes deux strictement positives ou toutes deux strictement négatives. Mais puisque $\mu_1 + \mu_2 = b + 1 > 0$, on a nécessairement $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$.

Ainsi, H présente un minimum local en $(b, \ln(b))$.

Exercice 3 :

Partie I : Etude d'une première expérience.

1. Simulation informatique.

(a)

```
def lancer(p):
    a = rd.random()
    if a < p:
        L = 1
    else:
        L = 0
    return L
```

(b)

```
def premierPile(p):
    Z = 1 # nombre de lancers effectués
    L = lancer(p) # résultat du premier lancer
    while L != 1 :
        Z = Z+1
        L = lancer(p)
    return Z
```

(c)

```
def nbFaces(p):
    Z = 1 # nombre de lancers effectués
    L = lancer(p) # résultat du premier lancer
    nombre_piles = L
    while nombre_piles != 2 :
        Z = Z+1
        L = lancer(p)
        nombre_piles = nombre_piles + L
    return Z-2
```

(d) Le résultat de ce programme est une valeur approchée de l'espérance de Y .

- À n fixé, les n premiers lancers constituent un schéma de Bernoulli (avec probabilité p d'obtenir Pile à chaque épreuve) et X_n est la variable aléatoire représentant le nombre de Piles obtenus. Donc X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On a $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$.
- Y peut prendre n'importe quelle valeur de \mathbb{N} .
- $(Y = 0) = (\overline{F_1} \cap \overline{F_2})$. Les lancers étant indépendants, $P(Y = 0) = p^2$.
 $(Y = 1) = ((F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}))$. Les deux événements séparés par \cup sont disjoints. Donc $P(Y = 1) = 2p^2q$.
 $(Y = 2) = ((F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap \overline{F_4}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap \overline{F_4}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4}))$
 et donc $P(Y = 2) = 3p^2q^2$.
- $Y = n$ veut dire exactement que le $n+2$ ième lancer a donné pile et qu'il y avait un seul autre pile dans les $n+1$ lancers précédents. C'est exactement $\overline{F_{n+2}} \cap (X_{n+1} = 1)$.
- X_{n+1} ne dépend que des $n+1$ premiers lancers qui sont indépendants du lancer $n+2$. Donc $P(Y = n) = P(X_{n+1} = 1)P(\overline{F_{n+2}}) = \binom{n+1}{1}p^1q^{n+1-1}p = (n+1)p^2q^n$.
- On reconnaît une série géométrique dérivée. En effet

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)p^2q^n = p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{p^2}{(1-q)^2} = 1.$$

- $E(Y)$ existe si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y = n)$ converge. Or, $nP(Y = n) = n(n+1)p^2q^n$. Or $n(n+1)q^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée seconde (avec une raison $q \in]0, 1[$) donc $E(Y)$ existe et

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)p^2q^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)np^2q^{n-1} = p^2q \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)q^{n-2} = \frac{2p^2q}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p}.$$

- La simulation de la question 1.d) était faite avec $p = 0,4$. Avec cette valeur de p , on obtient

$$E(Y) = \frac{2 \times 0,6}{0,4} = 3.$$

Ce résultat est bien cohérent avec la valeur approchée obtenue.

10. En raisonnant comme dans les questions 5. et 6. on constate que Y_k peut prendre toutes les valeurs entières et que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(Y_k = n) = (X_{n+k-1} = k-1) \cap \overline{F_{n+k}}$$

$$\text{et donc que } P(Y = n) = \binom{n+k-1}{k-1} p^{k-1} q^n p = \binom{n+k-1}{k-1} q^n p^k.$$

Partie II : Etude d'une seconde expérience.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_R(x) = 0$ si $x < 0$, $F_R(x) = x$ si $x \in [0, 1]$ et $F_R(x) = 1$ si $x > 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_S(x) = P(S \leq x) = P(1 - R \leq x) = P(R \geq 1 - x) = 1 - P(R < 1 - x) = 1 - P(R \leq 1 - x) = 1 - F_R(1 - x)$. (On a $P(R < 1 - x) = P(R \leq 1 - x)$ car R est une variable à densité.)
Si $x < 0$, on a $1 - x > 1$ et donc $F_R(1 - x) = 1$, d'où $F_S(x) = 1 - 1 = 0$.
Si $x \in [0, 1]$ alors $1 - x \in [0, 1]$ et donc $F_R(1 - x) = 1 - x$, ce qui donne $F_S(x) = 1 - (1 - x) = x$.
Si $x > 1$, alors $1 - x < 0$ et $F_R(1 - x) = 0$, d'où $F_S(x) = 1 - 0 = 1$.
 S suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
- On a $(T \leq t) = (R \leq t) \cap (S \leq t) = (R \leq t) \cap (1 - R \leq t) = (R \leq t) \cap (R \geq 1 - t)$.
- $t \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1 - t$. Donc $t \in [\frac{1}{2}, 1] \Leftrightarrow 0 \leq 1 - t \leq t \leq 1$. Dans ce cas, $(R \leq t) \cap (R \geq 1 - t) = (1 - t \leq R \leq t)$. La variable R étant à densité, on a

$$F_T(t) = P(1 - t \leq R \leq t) = F_R(t) - F_R(1 - t) = t - (1 - t) = 2t - 1.$$

- Pour $t < \frac{1}{2}$, $1 - t > \frac{1}{2}$ et donc $(R \leq t) \cap (R \geq 1 - t) = \emptyset$, donc $F_T(t) = 0$.
Pour $t > 1$, $1 - t < 0$ et donc $F_T(t) = P(1 - t \leq R \leq t) = F_R(t) - F_R(1 - t) = 1 - 0 = 1$.
Pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, on a $F_T(t) = 2t - 1 = \frac{t - 1/2}{1 - 1/2}$.
On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[1/2, 1]$.
On pouvait aussi passer par la densité. D'après ce qui précède, la densité de T vaut 2 sur $[1/2; 1]$ et 0 ailleurs; ce qui est bien la densité de la loi uniforme sur $[1/2; 1]$.
- Donc $E(T)$ et $V(T)$ existent. $E(T) = \frac{3}{4}$ et

$$V(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \int_{1/2}^1 2x^2 dx - 9/16 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{8}\right) - \frac{9}{16} = \frac{7}{12} - \frac{9}{16} = \frac{1}{48}.$$