DM n°3

À rendre le 03/12/2024

Exercice 1

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. On note $E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 / \ f(X) = X\} = \text{Ker } (f - Id)$ et $E_2 = \text{Ker } (f - 2Id)$.
   Montrer que chacun de ces espaces possède une base constituée d'un unique vecteur, que l'on notera e_1 pour E_1 et e_2 pour E_2. On prendra de plus la première coordonnée de e_1 égale à 1 et celle de e_2 égale à 2.
2. On pose $e_3 = (1, 1, 1)$. Vérifier que $f(e_3) = 2e_3 + e_2$.
3. Justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice T de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
5. On note P la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3). Donner la relation entre A, P, T et P^{-1}.
6. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P, T, P^{-1} et n.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer T^n (on pourra écrire T sous la forme $T = N + D$, D étant diagonale et N vérifiant $N^2 = 0_3$).
   (c) Expliciter la matrice P et déterminer son inverse P^{-1}.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n (tous ses coefficients).
   (e) Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 2 (facultatif)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'objectif du problème est l'étude, dans certains cas, de l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des matrices qui commutent avec A :

$$\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM - MA = 0_2\} \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Remarque : cette question est assez largement indépendante de la suite (elle sera utilisée à un unique moment).
   Soit $n \geq 2$ et soit F un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de base $(M_1, \dots, M_k)$ et soit B une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $G = \{BM, \ M \in F\}$ (c'est à dire l'ensemble des matrices qui s'écrivent BM, avec $M \in F$).

   (a) Montrer que dans ce cas $G = \text{Vect}(BM_1, \dots, BM_k)$ (en particulier G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

   (b) Montrer $(BM_1, \dots, BM_k)$ est une base de G.
   On admet que ce résultat reste vrai en multipliant à droite par B : $G' = \{MB, \ M \in F\}$ admet comme base $(M_1B, \dots, M_kB)$.

3. On suppose dans cette question que A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que dans ce cas $\mathcal{C}_A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Quelle est alors la dimension de $\mathcal{C}_A$?

4. On suppose dans cette question que A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq b$.

   (a) En posant $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, résoudre l'équation $AM - MA = 0_2$.

   (b) En déduire une base de $\mathcal{C}_A$.

   (c) Quelle est alors la dimension de $\mathcal{C}_A$?

5. On suppose dans cette question que A est de la forme $A = PDP^{-1}$, $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq b$ et P une matrice inversible.

   (a) Montrer que M commute avec D si et seulement si PMP^{-1} commute avec A ; c'est à dire que
   $$\mathcal{C}_A = \{PMP^{-1}, \ M \in \mathcal{C}_D\} \ .$$

   (b) En déduire une base de $\mathcal{C}_A$ (on pourra utiliser le résultat de la question 2.).

   (c) Quelle est alors la dimension de $\mathcal{C}_A$?

   (d) Montrer que (I_2, A) constitue une base de $\mathcal{C}_A$.