

Comparaison des fonctions et Développements Limités

Introduction, Rappels

Ce chapitre est destiné à fournir des outils pour l'étude des fonctions, en particulier leurs limites. Ce sera aussi l'occasion de revoir l'ensemble du cours de première année sur l'étude des fonctions à travers certains exercices. On ne rappellera pas tout lors du cours ; cependant on rappelle ci-dessous les formules de dérivation ainsi qu'un point en lien avec ce nouveau cours : les développements limités d'ordre 1. Les autres points à revoir sont (liste non exhaustive) :

- la définition de la continuité et de la dérivabilité (TD Ex7) ;
- les fonctions usuelles et leurs limites (TD Ex1) ;
- les règles usuelles concernant les limites (somme, produit, quotient ...) (TD Ex1) ;
- le théorème de la bijection continue et ses applications.

0.1 Formules de dérivations

On les rappelle brièvement.

Opérations algébriques : Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I . Alors :

Somme La fonction définie par $x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto u'(x) + v'(x)$.

Produit par une constante Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $x \mapsto \lambda u(x)$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto \lambda u'(x)$.

Produit La fonction définie par $x \mapsto u(x)v(x)$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Inverse La fonction $x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ (v ne doit pas s'annuler sur I) est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$.

Quotient La fonction définie par $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ (v ne doit pas s'annuler sur I) est dérivable sur I et a pour dérivée

$$x \mapsto \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Composition : Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur des intervalles I et J telles que $u(I) \subset J$. Alors la fonction définie sur I par $x \mapsto v(u(x))$ est dérivable et a pour dérivée $x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$.

Cas particuliers :

- La fonction définie par $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable et a pour dérivée $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.
- La fonction définie par $x \mapsto \ln(u(x))$ (on doit avoir $J \subset]0; +\infty[$) est dérivable et a pour dérivée $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $x \mapsto (u(x))^\alpha$ (J vérifiant certaines conditions suivant la valeur de α) est dérivable et a pour dérivée $x \mapsto \alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$.

0.2 Développements limités d'ordre 1

Définition 0.1. On dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre 1 (DL1) en un point x_0 lorsqu'il existe un réel a et une fonction ϵ définie sur un voisinage J de x_0 tels que

$$\bullet \forall x \in J, f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x) \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0.$$

Propriété 0.2. Si une fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en un point x_0 , alors f est dérivable en x_0 et ce DL1 s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x) .$$

Démonstration :

Remarque 0.3. Réciproquement, si f est dérivable en x_0 , f admet en ce point un DL1 et celui-ci est donné par la formule de la proposition précédente.

Remarque 0.4. Graphiquement, ce DL1 précise la distance entre la courbe et sa tangente au voisinage de x_0 :
 $d(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$.

Exemples 0.5. Déterminer les DL1 en 0 de e^x , $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Exemples 0.6. Déterminer la limite en 0^+ (si elle existe) de $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x^2}$.

1 Comparaison des fonctions

Dans ce qui suit, f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I et x_0 un point de I ou une borne de I (qui peut être $\pm\infty$). On appelle voisinage de x_0 un intervalle du type :

- $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ si x_0 est un point qui n'est pas une borne ;
- $]x_0 - \alpha; x_0[,]x_0 - \alpha; x_0]$, $]x_0; x_0 + \alpha[$, ou $[x_0; x_0 + \alpha[$ (à adapter à la situation) si x_0 est un point qui est une borne ;
- $]A; +\infty[$ (resp. $] - \infty; A]$) si x_0 est $+\infty$ (resp $-\infty$).

On supposera également les fonctions continues sur leur intervalle de définition.

1.1 Négligeabilité

On donne un sens précis au fait qu'une fonction soit négligeable devant une autre :

Définition 1.1. On dit que f est négligeable devant g en x_0 s'il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage J de x_0 telle que

- $\forall x \in J, f(x) = g(x) \epsilon(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$

On note alors : $f = o_{x_0}(g)$ (souvent par abus de langage : $f(x) = o(g(x))$).

Attention : Il ne suffit pas que l'on ait, pour tout x dans I , $f(x) \leq g(x)$ pour conclure que f est négligeable devant g .

Remarque 1.2. On peut réécrire le développement limité à l'ordre 1 rappelé en introduction :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) .$$

Exemples 1.3. Montrer que

$$1. x = o_{+\infty}(x^2)$$

$$2. x = o_{+\infty}(e^x)$$

Comme on l'a vu sur cet exemple, on peut caractériser la négligeabilité par le quotient :

Propriété 1.4. On garde les notations qui précèdent et on suppose de plus que g ne s'annule pas sur I (plus précisément : sur un voisinage de x_0 , sauf éventuellement en x_0). Alors $f = o_{x_0}(g)$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

Démonstration :

On reformule ainsi les règles de croissance comparées :

Propriété 1.5. Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$\bullet \text{ en } +\infty, x^\alpha = o(e^{\beta x}) ;$$

$$\bullet \text{ en } +\infty, (\ln x)^\beta = o(x^\alpha).$$

Démonstration :

Remarque 1.6. Rappelons que l'on a également, pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^{\beta x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0 ;$$

ce que l'on pourrait formuler :

$$e^{\beta x} = o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad (\ln x)^\beta = o_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) .$$

Exemple 1.7. Comparer, pour deux entier n et m vérifiant $0 < n < m$, de $(x - x_0)^n$ et $(x - x_0)^m$ en x_0 ainsi que de x^n et x^m en $\pm\infty$.

Propriété 1.8 (Règles de manipulation des o). Dans les formules qui suivent, les ' o ' s'entendent «en un x_0 fixé».

- Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.
- Si g admet une limite finie en x_0 et $f = o(g)$ en x_0 , alors f tend vers 0 en x_0 .
- Si $f = o(g)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f = o(g)$; si de plus $\lambda \neq 0$, $f = o(\lambda g)$.
- Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $f_1 + f_2 = o(g)$.
- Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 \times f_2 = o(g_1 \times g_2)$.
- Si $f = o(g)$, alors, pour toute fonction h , $f \times h = o(g \times h)$.

Démonstration :

Exemple 1.9. 1. Montrer qu'en $+\infty$,
 $x \ln(x) = o(x^2)$.

2. Déterminer le DL1 en 0 de
 $(1+x)^{1/2} + \ln(1+x)$.

Remarque 1.10. Le dernier point de la propriété est le plus souvent utilisé de la manière suivante : si on a, en x_0 , $f(x) = o(x^n)$, alors $xf(x) = o(x^{n+1})$ et $\frac{1}{x}f(x) = o(x^{n-1})$.

1.2 Équivalence

On donne un sens précis au fait que deux fonctions ont un comportement similaire :

Définition 1.11. On dit que f et g sont équivalentes en x_0 s'il existe une fonction γ définie sur un voisinage J de x_0 telle que

- $\forall x \in J, f(x) = g(x) \gamma(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = 1$

On note alors : $f \underset{x_0}{\sim} g$ (souvent par abus de langage : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$).

Remarque 1.12. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $g \underset{x_0}{\sim} f$.

Exemple 1.13. 1. Montrer que $x^3 - 3x^2 - 7x \underset{+\infty}{\sim} x^3$. 2. Montrer que $x^3 - 3x^2 - 7x \underset{0}{\sim} -7x$.

On peut également caractériser l'équivalence par le quotient :

Propriété 1.14. On garde les notations qui précèdent et on suppose de plus que g ne s'annule pas sur I (plus précisément : sur un voisinage de x_0 , sauf éventuellement en x_0). Alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 .$$

Exemple 1.15. Montrer que $x^3 + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^3$.

On utilisera également la propriété suivante :

Propriété 1.16. On suppose que sur I on a $f = g_1 + g_2$, avec $g_2 = o_{x_0}(g_1)$. Alors on a $f \underset{x_0}{\sim} g_1$.

Démonstration :

Exemple 1.17. Reprendre l'exemple précédent.

1.3 Fonctions usuelles

Les équivalents que nous utiliserons sont les suivants.

Propriété 1.18 (Fonctions admettant une limite finie non nulle). *Si la fonction f admet en x_0 une limite l non nulle, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} l$.*

Démonstration :

Remarque 1.19. L'hypothèse $l \neq 0$ est importante. On n'écrit d'ailleurs jamais $f(x) \sim 0$

Reprenons les DL1 en 0 vus précédemment :

- $\ln(1+x) = \dots$
- $e^x = \dots$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha = \dots$

On obtient ainsi :

Propriété 1.20 (Équivalents usuels en 0).

- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

En extrapolant ce qui a été vu dans des exemples (Ex 1.13), on obtient :

Propriété 1.21 (Fonctions polynômes). *Considérons la fonction polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_m x^m$, où $n > m$, $a_n \neq 0$ et $a_m \neq 0$ et on a écrit selon les degrés décroissants. Alors*

- $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- $P(x) \underset{0}{\sim} a_m x^m$

1.4 Règles d'utilisation

Les équivalents permettront en particulier de déterminer des limites.

Propriété 1.22. *Si f admet en x_0 une limite l finie ou infinie et si $g \underset{x_0}{\sim} f$, alors g admet également l pour limite en x_0 .*

Démonstration :

On aura besoin pour cela de combiner les équivalents usuels à travers certaines règles.

Propriété 1.23. Soit f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions telles que $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors on a :

- $f_1 \times f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 \times g_2$
- si $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha f_1 \underset{x_0}{\sim} \alpha g_1$
- $\frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$
- si $\alpha \in \mathbb{R}, (f_1)^\alpha \underset{x_0}{\sim} (g_1)^\alpha$

Démonstration :

Exemple 1.24. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\frac{x^2 + x - 3}{x^3 + 7x^2 + x - 6}$, puis sa limite.

Remarque 1.25. Les équivalents ne peuvent par contre être additionnés. Exemple : $x^3 + x^2$ et $-x^3 + x$ en $+\infty$.

Propriété 1.26. Soit f_1, f_2, f_3 des fonctions telles que $f_1 \underset{x_0}{\sim} f_2$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} f_3$. Alors on a : $f_1 \underset{x_0}{\sim} f_3$.

Démonstration :

On utilise également souvent la propriété suivante :

Propriété 1.27. Soit f, g des fonctions telles que $f \underset{x_0}{\sim} g$ et soit u une fonction admettant x_0 pour limite en x_1 . Alors on a :

$$f(u(x)) \underset{x_1}{\sim} g(u(x)) .$$

Démonstration :

Exemple 1.28. Déterminer la limite en $+\infty$ de $(x^2 - x + 6)\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Cas particuliers importants : si $u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\longrightarrow} 0$, alors

$$\bullet \ln(1 + u(x)) \underset{x_0}{\sim} u(x)$$

$$\bullet e^{u(x)} - 1 \underset{x_0}{\sim} u(x)$$

$$\bullet (1 + u(x))^\alpha - 1 \underset{x_0}{\sim} \alpha u(x)$$

Remarque 1.29. Attention, on n'a pas dit ci-dessus que les équivalents pouvaient être 'composés'. Exemple : $\exp(x^2)$ et $\exp(x^2 + x)$.

2 Développements limités

2.1 Définition

On dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n (en abrégé DL n) en un point x_0 lorsqu'il existe des nombres $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que, sur un voisinage de x_0 , on ait

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) .$$

On admettra qu'un tel DL n , s'il existe, est unique.

2.2 Formule de Taylor-Young

La propriété suivante sera admise :

Propriété 2.1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un point x_0 . Alors on a le DL2 suivant de f au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) .$$

Remarque 2.2. Le début du DL2 (qui est celui du DL1 également) donne l'équation de la tangente à la courbe en x_0 .

Propriété 2.3 (DL2 en 0 des fonctions usuelles).

$$\bullet \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\bullet e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Pour } \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Démonstration :

2.3 Règles d'utilisation

Les règles formelles d'utilisation ne sont pas exigibles. On donne quelques exemples cependant.

Addition : On a vu que les équivalents ne pouvaient être additionnés. Les DL2 permettent souvent de régler ce problème.

Exemple 2.4. Déterminer le DL2 en 0 puis un équivalent de $e^x - 1 - \ln(1+x)$.

Produit : Lorsque l'on fait le produit de deux DL2, on obtient à nouveau un DL2. La règle est (en résumé) la suivante : on multiplie les parties polynômiales des DL2 et on ne garde que les puissances inférieures ou égales à deux.

Exemple 2.5. Déterminer le DL2 en 0 de $e^x(1+x)^{-2}$.

Substitution : Comme pour les équivalents, on peut substituer, dans un DL en 0, une fonction qui tend vers 0 à x .

Exemple 2.6. Déterminer le DL2 en 0 de $\ln(1+2x)$.

Changement de variable : Cet exemple est en fait très proche du précédent, mais présenté un peu différemment.

Exemple 2.7. Déterminer le DL2 en -1 de $\ln(2+x)$.

2.4 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Une autre application du DL2 est la détermination de la position d'une courbe par rapport à sa tangente (les propriétés ci-dessous sont admises).

Propriété 2.8. Soit f une fonction admettant au voisinage d'un point x_0 le DL2 :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) .$$

Alors

- si $a_2 > 0$, la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au voisinage du point x_0 ;
- si $a_2 < 0$, la courbe représentative de f est au-dessous de sa tangente au voisinage du point x_0 ;
- si $a_2 = 0$, on ne peut pas conclure par cette méthode.

Corollaire 2.9. Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage d'un point x_0 . Alors

- si $f''(x_0) > 0$, la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au voisinage du point x_0 ;
- si $f''(x_0) < 0$, la courbe représentative de f est au-dessous de sa tangente au voisinage du point x_0 ;
- si $f''(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure par cette méthode.