Corrigé du DM n°3

À rendre le 03/12/2024

Exercice 1

1. $\underline{E_1}$ En notant $X=(x,y,z)$, $X\in E_1 \Leftrightarrow (A-I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{3,1}$.

   On résout :

$$\begin{aligned}
(A-I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{3,1} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2&-2&3\\1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{3,1}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2x-2y+3z&=0\\x-y+2z&=0\\z&=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2x-2y+3z&=0\\z&=0\\z&=0\end{cases} \quad \Big| \; L_2\leftarrow 2L_2-L_1\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\x=y\end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc, en notant $e_1=(1,1,0)$, $E_1=Vect(e_1)$.
   Comme E_1 est engendré par un unique vecteur non nul, ce vecteur en constitue bien une base.

   $\underline{E_2}$En notant $X=(x,y,z)$, $X\in E_1 \Leftrightarrow (A-I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{3,1}$.

   On résout :

$$\begin{aligned}
(A-2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{3,1} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{3,1}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y+3z&=0\\x-2y+2z&=0\\0&=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y+3z&=0\\-z&=0\end{cases} \quad \Big| \; L_2\leftarrow L_2-L_1\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\x=2y\end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc, en notant $e_2=(2,1,0)$, $E_2=Vect(e_2)$.
   Comme E_2 est engendré par un unique vecteur non nul, ce vecteur en constitue bien une base.

2. On calcule :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} \quad ;$$

donc $f(e_3) = (4,3,2)$.
D'autre part $2e_3 + e_2 = 2(1,1,1) + (2,1,0) = (4,3,2)$.
On a donc bien $f(e_3) = 2e_3 + e_2$;

3. Montrons tout d'abord que cette famille est libre. La relation $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (0,0,0)$ est équivalente au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que e_1, e_2 et e_3 forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Comme de plus c'est une famille à trois élément et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, on en conclut qu'il s'agit bien d'une base.

4. On a vu que e_1 est solution de l'équation $f(X) = X$; donc $f(e_1) = e_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$.
De même, $e_2 \in \text{Ker } (f - 2Id)$, donc $f(e_2) = 2e_2 = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3$;
et $f(e_3) = 0e_1 + e_2 + 2‘e_3$.
On en déduit que la matrice T de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. La matrice A est la matrice de f dans la base canonique ; T est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) ; et P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3). Donc, d'après la formule de changement de base, on a

$$T = P^{-1}AP \ .$$

6. (a) On a $A = PTP^{-1}$. Par récurrence, on montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

(b) On a $T = D + N$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; donc D et N commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(D+N)^n = (N+D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \ .$$

Mais de plus $N^2 = 0_3$, donc pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0_3$. On obtient ainsi :

$$T^n = N^0D^n + nND^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} .$$

(c) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminons son inverse.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $PX = Y$ est équivalente à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & a \\ x+y+z & = & b \\ z & = & c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & a \\ y & = & a-b \\ z & = & c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} x & = & a-2(a-b)-c = a+2b-c \\ y & = & a-b \\ z & = & c \end{array}\right.$$

On en conclut :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & PT^nP^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2^n & -2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 2-2^{n+1} & -1+n2^n+2^n \\ -1+2^n & 2-2^n & -1+n2^{n-1}+2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} . \end{array}$$

(e) En remplçant n par -1 dans la formule obtenue précédemment, on obtient la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculons :

$$QA = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3 .$$

Donc A est inversible et son inverse est Q.
Conclusion : la formule obtenue à la question précédente reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2 (facultatif)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'objectif du problème est l'étude, dans certains cas, de l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des matrices qui commutent avec A :

$$\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM - MA = 0_2\} \ .$$

1. - On a $A0_2 - 0_2A = 0_2$, donc $0_2 \in \mathcal{C}_A$.
   - Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{C}_A^2$, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
     On a
     $$\begin{aligned} A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) - (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)A &= \lambda_1(AM_1 - M_1A) + \lambda_2(AM_2 - M_2A) \\ &= \lambda_1 0_2 + \lambda_2 0_2 \\ &= 0_2 \end{aligned}$$
     Donc $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in \mathcal{C}_A$.

   Conclusion : $\mathcal{C}_A$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. (a)
   $$\begin{aligned} G &= \{BM, \ M \in F\} \\ &= \left\{ B \sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_i, \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (BM_i), \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \right\} \\ &= \mathrm{Vect}(BM_1, \ldots, BM_k) \end{aligned}$$
   En particulier G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) D'après la question précédente, $(BM_1, \ldots, BM_k)$ est une partie génératrice de G.
   Montrons qu'il s'agit d'une famille libre.
   Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que
   $$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (BM_i) = 0_n \ .$$
   Alors
   $$B \sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_i = 0_n \ ;$$
   et, comme B estinversible,
   $$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_i = 0_n \ .$$
   Comme les M_i, $1 \leq i \leq k$ forment une base de F, cela implique que tous les λ_i sont nuls.
   Donc $(BM_1, \ldots, BM_k)$ est une famille libre ; et don $(BM_1, \ldots, BM_k)$ est une base de G.

3. Remarquons que $A = aI_2$, avec $a \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$AM - MA = aI_2M - M(aI_2) = a(I_2M - MI_2) = a(M - M) = 0_2 \ .$$

Donc dans ce cas $\mathcal{C}_A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) La dimension de $\mathcal{C}_A$ est alors 4.

4. (a) En posant $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
AM - MA = 0_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = 0_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ax & by \\ az & bt \end{pmatrix} = 0_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} ax = ax \\ ay = by \\ bz = az \\ bt = bt \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)y = 0 \\ (b-a)z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_A &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Ces deux matrices étant de plus non colinéaires, elles forment une famille libre et donc une base de $\mathcal{C}_A$.

(c) La dimension de $\mathcal{C}_A$ est 2.

5. On suppose dans cette question que A est de la forme $A = PDP^{-1}$, $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq b$ et P une matrice inversible.

(a)

$$MD = DM \ \Leftrightarrow\ MPDP^{-1} = PDP^{-1}M \ \Leftrightarrow\ P^{-1}MPD = DP^{-1}MP \ .$$

Ainsi M commute avec D si et seulement si PMP^{-1} commute avec A.

(b) On déduit de la question précédente que

$$\mathcal{C}_A = \left\{ PMP^{-1},\ M \in \mathcal{C}_D \right\} \ .$$

On a vu à la question précédente que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{C}_D$. Donc, d'après la résultat de la question 2.,

$$\left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de

$$\{PM,\ M \in \mathcal{C}_D\}\ ;$$

et, en appliquant à nouveau le résultat de la question 2. (pour la multiplication à droite),

$$\left(P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}\right)$$

est une base de

$$\left\{PMP^{-1},\ M \in \mathcal{C}_D\right\}\ ,$$

c'est à dire de $\mathcal{C}_A$.

(c) La dimension de $\mathcal{C}_A$ est 2.

(d) I_2 et A sont bien des éléments de $\mathcal{C}_A$.
De plus il forment une famille libre (vecteurs non colinéaires). Donc, comme $\mathcal{C}_A$ est de dimension 2, (I_2, A) est une base de $\mathcal{C}_A$.