

Feuille d'exercices n°1 : Comparaison des fonctions

1 Méthodes de base

Exercice 1. – Application des règles de base sur les limites – Déterminer chacune des limites suivantes.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $x \mapsto \frac{2}{x^5 - 1}$ en 1^+ et 1^- | 3. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ en 0^+ | 5. $x \mapsto \ln(x^2 + x + 5)$ en $+\infty$ |
| 2. $x \mapsto \frac{e^x}{x - 1}$ en 1^+ et 1^- | 4. $x \mapsto x^2 e^{1/x}$ en $-\infty$ | 6. $x \mapsto (x^2 + x + 5)^x$ en $+\infty$ |

Exercice 2. – Dérivation – Dériver chacune des fonctions suivantes sur son intervalle de définition I .

- | | |
|--|---|
| 1. $f : x \mapsto \frac{2}{x^5}$ sur $I =]0; +\infty[$ | 6. $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + x + 5)^3}$ sur $I = \mathbb{R}$ |
| 2. $f : x \mapsto \frac{1}{x} e^x$ sur $I =]0; +\infty[$ | 4. $f : x \mapsto e^{x^2 + x + 5}$ sur $I = \mathbb{R}$ |
| 3. $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$ | 7. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 5}$ sur $I = \mathbb{R}$ |
| 5. $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 5)$ sur $I = \mathbb{R}$ | 8. $f : x \mapsto (x^2 + x + 5)^x$ sur $I = \mathbb{R}$ |

Exercice 3. – Théorème de la bijection continue – On considère la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right).$$

1. Étudier la fonction f .
2. Montrer que, pour l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution.
3. Montrer que, pour $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution. On note u_n celle-ci.
4. Déterminer le sens de variation ainsi que la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

Exercice 4. – Utiliser la caractérisation de l'équivalence – Montrer que $x^3 + 7x^2 - 3x \underset{0}{\sim} -3x$.

Exercice 5. – Utiliser un équivalent pour déterminer une limite – Déterminer la limite en 0 de

$$x \mapsto \frac{e^x - 1}{1 - (1+x)^{3/2}}.$$

Exercice 6. – Déterminer des équivalents en 0 et $+\infty$ – Déterminer des équivalents simples (puissances de x) des fonctions suivantes au voisinage de 0 et $+\infty$:

- | | | |
|---|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $f_1 : x \mapsto \frac{2x^2 + 3}{x^4 - x^3 + x}$, | 2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{1+x} - 1$, | 3. $f_3 : x \mapsto x^2 + 2 \ln x$. |
|---|---------------------------------------|--------------------------------------|

Exercice 7. – Utiliser un DL2 pour déterminer une limite – Déterminer la limite en 0 de

$$x \mapsto \frac{x^2 + \ln(1 + 3x) - 3x}{2x^2 + x^3}.$$

Exercice 8. – Utiliser un DL pour établir la continuité et la dérivabilité en un point

– On considère la fonction f définie sur $] -1/2; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est continue sur $] -1/2; +\infty[$ puis qu'elle y est dérivable.

Exercice 9. – Utiliser la formule de Taylor-Young pour établir un DL2 – Déterminer le DL2 en 0 de $f : x \mapsto (1 + x)e^{x^2+x-1}$.

Exercice 10. – Position d'une courbe par rapport à sa tangente – On reprend $f : x \mapsto (1 + x)e^{x^2+x-1}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 puis déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

2 Équivalents, développements limités, limites

Exercice 11. – Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes au voisinage de 0 et $+\infty$:

1. $x \mapsto \frac{x^3 e^x}{\ln x + x^2}$,
2. $x \mapsto \frac{x^2 \ln(x)}{1+x^2}$,
3. $x \mapsto \ln(1+x) - \ln(x)$.

Exercice 12. – Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}$,
3. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$,
5. $f : x \mapsto (1+x)^2 e^x$,
2. $f : x \mapsto (1+x)^{3/2}$,
4. $f : x \mapsto e^{2+x}$,
6. $f : x \mapsto \frac{xe^x}{\sqrt{1+x}}$.

Exercice 13. – Etudier localement au voisinage de 0 (équation de la tangente et positions relatives) les fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{1+x} - e^{-x}$,
2. $f_2 : x \mapsto x - \ln(1+x)$,
3. $f_3 : x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$.

Exercice 14. – Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{x^2}$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x \ln(1+2x)}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$,

Exercice 15. – En utilisant les DL usuels, déterminer un DL2 en 1 des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^{3/2}}$.
2. $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{x}}$,

Exercice 16. – – En posant $X = 1/x$, étudier au voisinage de $+\infty$ les fonctions f et g définies par :

1. $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$,
2. $g(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1 + 2/x})$.

Exercice 17. – Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Étudier f_n sur $[0, 1]$. Montrer en particulier que f_n réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle à préciser.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in [0, 1]$.
3. Montrer que $\forall x \in [0, 1], f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. En déduire que (x_n) est croissante.
4. Soit $\ell \in [0, 1]$ la limite de (x_n) : justifier son existence et déterminer ℓ . On suppose que $\ell < 1$. En utilisant le fait que $f_n(x_n) = 0$, obtenir une contradiction. En déduire la valeur de ℓ .

3 Études de fonctions

Exercice 18. – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. (a) Étudier le sens de variation de $g : x \mapsto (x - 1)e^x + 1$ et en déduire son signe.
(b) Déterminer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.
(c) Établir le tableau de variation de f .
(d) Montrer que pour tout entier $n > 0$ il existe un unique réel positif u_n tel que $f(u_n) = n$.
(e) Déterminer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .
4. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer l'équation de sa tangente.
5. On admet que le DL3 de l'exponentielle en 0 est : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 19. – Soit f définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $x \mapsto \frac{\ln x}{(x-1)}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 1 (on note toujours f ce prolongement).
2. Montrer que f est dérivable en 1.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.