

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES ET LES SÉRIES

Rappels

0.1 Suites et sommes usuelles

On commence par rappeler les formules des sommes usuelles finies. Sont à revoir également :

- l'expression du terme général d'une suite arithmétique ou géométrique ;
- la méthode d'étude d'une suite arithmético-géométrique ;
- la méthode d'étude d'une suite définie par une relation du type : $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$.

Propriété 0.1 (Somme des termes d'une suite géométrique). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$). Alors on a, pour m et n dans $\mathbb{N}$ ($m \leq n$) :

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}.$$

Remarque : u_m est le premier terme de la somme ; $n - m + 1$ est le nombre de termes de la somme.

Cas particulier :

On a, pour $n \geq 1$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Propriété 0.2 (Somme des termes d'une suite arithmétique). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique. Alors on a, pour m et n dans $\mathbb{N}$ ($m \leq n$) :

$$\sum_{k=m}^n u_k = (n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}.$$

Remarque : u_m est le premier terme de la somme, u_n le dernier et $n - m + 1$ est le nombre de termes de la somme.

Cas particulier : somme des n premiers entiers

On a, pour $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Propriété 0.3 (Somme des carrés des n premiers entiers). On a, pour $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

0.2 Suites monotones, bornées

Ces propriétés sont importantes pour l'étude des suites pour lesquelles on ne dispose pas de formule pour le terme général.

Définition 0.4. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite :

- **croissante** lorsque : $\forall n \geq 0, u_{n+1} \geq u_n$;
- **décroissante** lorsque : $\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq u_n$;
- **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

En pratique : pour montrer qu'une suite est monotone (ou non), on étudie en général le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Définition 0.5. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite :

- **majorée** lorsque qu'il existe un réel M tel que : $\forall n \geq 0, u_n \leq M$;
- **minorée** lorsque qu'il existe un réel m tel que : $\forall n \geq 0, u_n \geq m$;
- **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée.

Propriété 0.6. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante. On a alors l'alternative suivante :

- Soit il existe un réel M tel que $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée par M . Alors $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite l . On a de plus :

$$l \leq M \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, u_n \leq l.$$
- Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas majorée. Elle admet alors pour limite $+\infty$.

De même si une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée par un réel m et décroissante, alors elle converge vers une limite l . On a de plus :

$$l \geq m \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, u_n \geq l.$$

1 Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction définie d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in I$, on dit alors que l'intervalle I est stable par f et on note $f(I) \subset I$.

Étant donné $a \in I$, on peut alors définir une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$. En particulier, on a alors : quel que soit $n \geq 0$, $u_n \in I$ (on demande en général de redémontrer ce point). On garde ces notations pour la suite du paragraphe et on suppose que l'on est dans la situation décrite ci-dessus.

Concernant les points abordés dans le paragraphe précédent :

- si l'intervalle I est borné, alors on peut conclure que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée ;
- pour étudier ses variations, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, c'est à dire celui de $f(u_n) - u_n$; on est alors amené à étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

Définition 1.1. Un élément $\alpha \in I$ solution de l'équation $f(x) = x$ est appelé point fixe de f .

En pratique : Si l'on a étudié le signe de $x \mapsto f(x) - x$, un point fixe est un point en lequel cette fonction s'annule.

On aura besoin pour démontrer le théorème du point fixe de la propriété suivante, qui est une conséquence directe de la définition de la continuité :

Propriété 1.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit (u_n) une suite d'éléments de I admettant une limite finie l .

Si f est continue en l , alors la suite $(f(u_n))_n$ admet pour limite $f(l)$.

La propriété suivante est importante dans de nombreux contextes :

Propriété 1.3 (Théorème du point fixe). *Avec les notations qui précèdent, supposons que (u_n) admette une limite $l \in I$ et que f soit continue en l . Alors l est un point fixe de f .*

Démonstration :

Utilisation de l'inégalité des accroissements finis (IAF) : Lorsque la suite n'est pas monotone, ou pour préciser la vitesse de convergence, on utilise parfois l'IAF. Cette technique nécessite de pouvoir majorer la valeur absolue de la dérivée sur I : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$. On en déduit grâce à l'IAF que pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$. En particulier, si $\alpha \in I$ est un point fixe de f , pour tout $n \geq 0$, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq K|u_n - \alpha|$, c'est à dire $|u_{n+1} - \alpha| \leq K|u_n - \alpha|$. On en déduit par récurrence que pour tout n , $|u_n - \alpha| \leq K^n|u_0 - \alpha|$. Si $K < 1$, on peut en conclure que (u_n) converge vers α (on détaillera sur un exemple en TD).

2 Séries : définitions et premières propriétés

Ce paragraphe reprend essentiellement ce qui a été vu en première année. Les propriétés seront admises.

Étant donnée une suite $(u_n)_{n \geq 0}$, l'étude de la série de terme général u_n est l'étude de la convergence de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k .$$

Définition 2.1. *Lorsque la suite de ces sommes partielles converge (c'est à dire admet une limite finie), on dit que la série de terme général u_n converge ; sinon, on dit qu'elle diverge. En cas de convergence, on définit la somme de la série par :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n .$$

Notation : Au lieu d'écrire "montrer que la série de terme général u_n converge", on écrira souvent "montrer que $\sum u_n$ converge" ou bien "montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge". Il s'agit juste d'une abréviation ; on ne présuppose

pas en écrivant cela que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe. La confusion peut venir du fait que $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sont des écritures proches qui ne désignent pas la même chose.

Les premières propriétés des séries sont les suivantes.

Propriété 2.2. *Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) tend vers 0.*

Remarques 2.3. • **Contraposée** : *Si la suite u_n ne tend pas vers 0, on peut donc conclure directement que $\sum u_n$ diverge. On dit alors qu'elle diverge grossièrement.*

- **Réciproque** : *La réciproque de la propriété qui précède est fausse, comme le montre l'exemple de $\sum 1/n$, qui diverge.*

Propriété 2.4 (Changement d'indice de départ). *Quel que soit $n_0 \geq 0$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge. En cas de convergence, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n .$$

Propriété 2.5 (Réindexation). *Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors, pour tout $n_0 \geq 0$,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_{k-n_0} .$$

Propriété 2.6 (Linéarité). *Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent, et si λ et μ sont deux nombres réels, alors, la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

3 Séries de référence

3.1 Sommes usuelles

On peut montrer en utilisant l'expression des sommes finies des suites géométriques la convergence des séries géométriques (et dérivées) de raison $q \in]-1, 1[$:

Propriété 3.1 (Série géométrique). *Les séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent ssi $q \in]-1, 1[$ et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad ; \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = q^{n_0} \frac{1}{1-q} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad ; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3} .$$

On admet la convergence de la série exponentielle :

Propriété 3.2 (Série exponentielle). *Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x .$$

Exemples 3.3. *Calculer les sommes suivantes (on justifiera brièvement leur convergence).*

1. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$

Exemples 3.4. Calculer les sommes suivantes (on justifiera brièvement leur convergence).

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3.2 Séries de Riemann

Ces séries serviront souvent de point de comparaison.

Propriété 3.5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration : (cas $\alpha > 1$, voir TD pour la réciproque)

4 Comparaison des suites

Les définitions et propriétés sont similaires à celles concernant les fonctions (ainsi que les démonstrations, que l'on ne refait pas dans ce cadre). Par contre, on ne considère que des limites lorsque n tend vers $+\infty$ (et parfois on ne précise pas).

Définition 4.1. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) (lorsque n tend vers $+\infty$) lorsqu'il existe une suite (ϵ_n) telle que

- il existe n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, u_n = v_n \epsilon_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$

On note alors : $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ (souvent : $u_n = o(v_n)$).

Exemple 4.2. • $n = o(n^2)$ • $u_n = o(1)$ signifie que $\lim u_n = 0$.

Propriété 4.3. On garde les notations qui précèdent et on suppose de plus que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors

$$u_n = o(v_n)$$

si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 .$$

On reformule ainsi les règles de croissance comparées :

Propriété 4.4. Pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $q > 1$,

- $n^\alpha = o(q^n)$;
- $q^n = o(n!)$.
- $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$;

Propriété 4.5 (Règles de manipulation des o). • Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

- Si u_n admet une limite finie et $v_n = o(u_n)$, alors v_n tend vers 0.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n = o(v_n)$; si de plus $\lambda \neq 0$, $u_n = o(\lambda v_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(r_n)$ et $v_n = o(s_n)$, alors $u_n \times v_n = o(r_n \times s_n)$.

Définition 4.6. On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes s'il existe une suite (γ_n) telle que

- il existe n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, u_n = v_n \gamma_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = 1$

On note alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ (souvent : $u_n \sim v_n$).

Exemple 4.7. $n^2 \sim n^2 - 3n + 1$

Remarques 4.8. • On peut retenir (et utiliser) le fait qu'une suite étant un polynôme en n est équivalente à son terme de plus haut degré.

- si $\lim u_n = l$ et $l \neq 0$, $u_n \sim l$. Attention, cela est faux si $\lim u_n = 0$. De manière générale, on n'écrit jamais $u_n \sim 0$.

On peut également caractériser l'équivalence par le quotient :

Propriété 4.9. *On garde les notations qui précèdent et on suppose de plus que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors $u_n \sim v_n$ si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 .$$

On a également :

Propriété 4.10. *Si $v_n = o(u_n)$, alors*

$$u_n + v_n \sim u_n .$$

Propriété 4.11 (Équivalents usuels). *Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. Alors*

- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$

On peut également effectuer ces substitutions dans des DL2 en 0.

Exemple 4.12. *Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :*

- $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$
- $\sqrt{1 + e^{-n}} - 1$

Propriété 4.13. *Soit $(u_n), (v_n), (r_n), (s_n)$ des suites telles que $u_n \sim r_n$ et $v_n \sim s_n$; alors on a :*

- $u_n \times v_n \sim r_n \times s_n$
- $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{r_n}{s_n}$
- si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(u_n)^\alpha \sim (r_n)^\alpha$
- $|u_n| \sim |r_n|$

Remarque 4.14. *Attention, la relation d'équivalence n'est pas compatible avec l'addition et la composition.*

Les équivalents permettront également de déterminer des limites.

Propriété 4.15. *Si (u_n) admet une limite l et si $v_n \sim u_n$, alors (v_n) admet également l pour limite.*

Exemple 4.16. *Déterminer la limite de $u_n = (2n^2 + 3n - 7)(e^{1/3n^2} - 1)$.*

5 Applications aux séries

5.1 Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, on va voir que les comparaisons entre suites permettent de conclure sur la convergence de séries.

Lemme 5.1. *Soit (u_n) une suite à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles associée (S_n) est croissante.*

Démonstration :

Propriété 5.2. *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ des suites telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n .$$

Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge ; et dans ce cas on a de plus : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration :

Remarque 5.3. *On utilise souvent la contraposée : si $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont des suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$, et si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.*

Remarque 5.4. La conclusion de la propriété précédente reste vraie si on a $0 \leq u_n \leq v_n$ seulement à partir d'un rang n_0 . En effet, la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Corollaire 5.5. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ des suites à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration :

Exemple 5.6. Montrer la convergence des séries suivantes :

• $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$

• $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{3^n}$

Corollaire 5.7. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ des suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. La série $\sum v_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration :

Remarque 5.8. Bien noter que ces propriétés ne peuvent être utilisées qu'avec des séries à termes positifs.

Exemple 5.9. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{n+3}{2n^3+n^2+n+1}$.

5.2 Convergence absolue

Pour une série à termes non tous positifs, afin de pouvoir utiliser les critères de comparaison vus ci-dessus, on utilisera souvent la notion de convergence absolue.

Définition 5.10. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Propriété 5.11 (admis). Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge.

Remarque 5.12. La réciproque de ce théorème est fausse, comme le montre l'exemple de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (voir TD).

Exemple 5.13. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{n-3}{-2n^3+n^2-n+1}$.