

Corrigé du DS n°1

le 11/09/2026

Durée : 2h

Exercice 1 :

Partie I : Variations des suites

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, on a $\mathcal{P}_n : u_n > 0$ et $v_n > 0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$ et $v_0 = 2 > 0$. $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Si pour un $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, alors $u_{n+1} = 5u_n + 2v_n > 0$ et $v_{n+1} = 3u_n + 6v_n > 0$.

La propriété est démontrée par récurrence.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$, on a $\mathcal{P}_n$ est vraie.

2. On a $u_{n+1} - u_n = 4u_n + 2v_n > 0$ car ce sont des entiers positifs. De même, $v_{n+1} - v_n = 3u_n + 5v_n > 0$.
Les deux suites sont strictement croissantes.

Partie II : Terme général avec suites auxiliaires

3. $x_0 = u_0 + v_0 = 1 + 2 = 3$ et $y_0 = 3u_0 - 2v_0 = 3(1) - 2(2) = -1$.

4. $x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (5u_n + 2v_n) + (3u_n + 6v_n) = 8u_n + 8v_n = 8x_n$.
La suite est géométrique de raison 8. Son terme général est $x_n = x_0 8^n = 3 \cdot 8^n$.

5. $y_{n+1} = 3(5u_n + 2v_n) - 2(3u_n + 6v_n) = 15u_n + 6v_n - 6u_n - 12v_n = 9u_n - 6v_n = 3y_n$.
La suite est géométrique de raison 3. Son terme général est $y_n = y_0 3^n = -3^n$.

6. En multipliant la première ligne du système par 2 et en l'ajoutant à la deuxième, on trouve
 $5u_n = 2x_n + y_n$, soit $u_n = \frac{2}{5}x_n + \frac{1}{5}y_n$. On en déduit $v_n = x_n - u_n = \frac{3}{5}x_n - \frac{1}{5}y_n$.

7. En remplaçant par les expressions de x_n et y_n , on obtient :

$$u_n = \frac{2}{5}(3 \cdot 8^n) + \frac{1}{5}(-3^n) = \frac{6}{5}8^n - \frac{1}{5}3^n \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3}{5}(3 \cdot 8^n) - \frac{1}{5}(-3^n) = \frac{9}{5}8^n + \frac{1}{5}3^n.$$

Partie III : Récurrence d'ordre 2

8. $u_1 = 5(1) + 2(2) = 9$ et $v_1 = 3(1) + 6(2) = 15$.

9. De $u_{n+1} = 5u_n + 2v_n$ on déduit $2v_n = u_{n+1} - 5u_n$ puis $v_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - 5u_n)$ (*).

À partir de la définition des suites, on obtient $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 2v_{n+1}$, on remplace v_{n+1} :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} + 2(3u_n + 6v_n) = 5u_{n+1} + 6u_n + 12v_n.$$

Puis en injectant (*) : $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n + 6(u_{n+1} - 5u_n) = 11u_{n+1} - 24u_n$.

10. Le discriminant est $\Delta = 11^2 - 4(24) = 121 - 96 = 25$. Les racines sont $x_1 = \frac{11-5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{11+5}{2} = 8$.

11. En utilisant l'équation de la question précédente, on sait que le terme général de la suite (u_n) s'exprime sous la forme

$$u_n = a3^n + b8^n.$$

Le système $u_0 = a + b = 1$ et $u_1 = 3a + 8b = 9$ donne $b = 1 - a$ puis $3a + 8(1 - a) = 9 \implies -5a = 1$ d'où $a = -1/5$ et on trouve alors $b = 6/5$.

On en conclut : $u_n = -\frac{1}{5}3^n + \frac{6}{5}8^n$.

On retrouve bien le résultat de la partie précédente.

12. Par la relation (*), on calcule : $v_n = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{5}3^{n+1} + \frac{6}{5}8^{n+1} - 5 \left(-\frac{1}{5}3^n + \frac{6}{5}8^n \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5}3^n + \frac{18}{5}8^n \right]$

Ainsi $v_n = \frac{1}{5}3^n + \frac{9}{5}8^n$.

Exercice 2

I. Étude d'une fonction

1. (a) La fonction g est dérivable car somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + 1$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$.
La fonction g est donc (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.
- (b) On $g(0) = e^0 - 1 + 0 = 0$.
Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cela implique que :
— pour $x < 0$, $g(x) < 0$;
— pour $x > 0$, $g(x) > 0$.
2. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées).
On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (b) $f(x) = \frac{x}{e^x} \left(e^x + \frac{e^x}{x} - 1 \right)$.
Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x + \frac{e^x}{x} - 1 \right) = -1$.
D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$.
On en conclut que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
3. (a) La fonction f est dérivable car quotient et somme de fonctions dérivable. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = 1 - \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x}{e^x} - \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x - 1 + x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}.$$

- (b) D'après le résultat de la question précédente, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On déduit alors le tableau de variations de f du signe de $g(x)$ étudié ci-dessus :

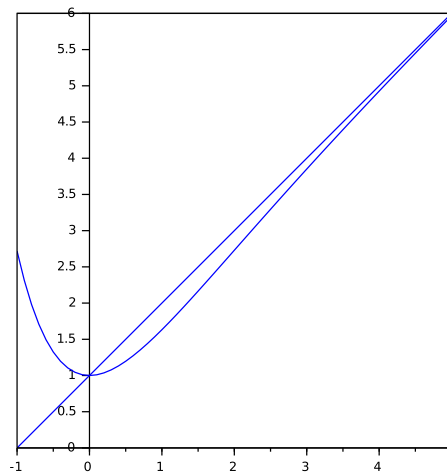
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$
		0	

II. Représentation graphique

4. On étudie le signe de $f(x) - (x+1) = -\frac{x}{e^x}$, du signe opposé à celui de x . Donc $\mathcal{C}$ est
— au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $] -\infty; 0[$;
— au-dessous de $\mathcal{D}$ sur $] 0; +\infty[$.

5. On a $f(x) - (x + 1) = -\frac{x}{e^x}$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$ (croissances comparées).

Graphiquement, cela implique que la hauteur séparant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (on dit que $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}$).



6.

III. Calcul d'une intégrale

7.

$$\int_0^2 ((x + 1) - f(x)) \, dx = \int_0^2 \frac{x}{e^x} \, dx = \int_0^2 x e^{-x} \, dx .$$

On effectue une intégration par parties en prenant

$$\begin{aligned} u(x) &= x & ; & & u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= e^{-x} & ; & & v(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^2 ((x + 1) - f(x)) \, dx &= \int_0^2 u(x) v'(x) \, dx \\ &= [u(x) v(x)]_0^2 - \int_0^2 u'(x) v(x) \, dx \\ &= [-x e^{-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} \, dx \\ &= -2e^{-2} + [-e^{-x}]_0^2 \\ &= -2e^{-2} + (-e^{-2} - (-1)) \\ &= 1 - 3e^{-2} \end{aligned}$$

8. Cette intégrale donne la valeur de la surface comprise entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$, entre les droites verticales d'abscisses 0 et 2.

IV. Étude d'une suite

9. (a) `import math`

```
def f(x) :
    y=x+1-x/math.exp(x)
    return y
```

```
def suite(n):
    u=0
    for i in range(n):
        u = f(u)
    return u
```

- (b) Ce graphique semble indiquer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
10. (a) Étudions la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x$.
 Cette fonction est dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x - 1$.
 La fonction h est donc
 — décroissante sur $] -\infty; 0]$;
 — croissante sur $[0; +\infty[$.
 La fonction h atteint donc son minimum en $x = 0$.
 Comme $h(0) = 1$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$ et donc $e^x > x$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = 1 - \frac{u_n}{e^{u_n}} = \frac{e^{u_n} - u_n}{e^{u_n}} .$$

Or $e^{u_n} > 0$ et, d'après la question précédente, $e^{u_n} - u_n > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
 Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- (c) $f(x) = x \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^x - x = 0$.
 Or on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$.
 Conclusion : cette équation n'a pas de solution.

- (d) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Il y a donc deux possibilités :
 — soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et elle admet alors une limite finie ;
 — soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si la première alternative est vérifiée, comme f est continue, la limite l de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $l = f(l)$. Mais on a vu que cette équation n'avait pas de solution.

Conclusion : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut admettre une limite finie et on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty .$$