

DS n°1

le 11/09/2026

Durée : 2h

- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
- Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
- On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1 :

On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 6v_n \end{cases}.$$

Partie I : Variations des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : u_n et v_n sont des entiers strictement positifs.
2. En déduire que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement croissantes.

Partie II : Terme général des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide de deux suites auxiliaires.

On considère, dans cette partie, les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel n par $x_n = u_n + v_n$ et $y_n = 3u_n - 2v_n$.

3. Calculer les valeurs de x_0 et y_0 .
4. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 8 puis donner le terme général de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Montrer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 puis donner le terme général de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
6. Pour tout n entier naturel fixé, résoudre le système suivant d'inconnues u_n et v_n et de paramètres x_n et y_n :

$$\begin{cases} u_n + v_n = x_n \\ 3u_n - 2v_n = y_n \end{cases}$$
7. On peut alors en déduire les termes généraux de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = -\frac{1}{5}3^n + \frac{6}{5}8^n$ et $v_n = \frac{1}{5}3^n + \frac{9}{5}8^n$.

Partie III : Terme général des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide d'une relation de récurrence d'ordre 2.

8. Calculer u_1 et v_1 .
9. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a la relation

$$(*) : v_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - 5u_n).$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$u_{n+2} = 11u_{n+1} - 24u_n.$$

10. Déterminer les racines x_1 et x_2 du polynôme $X^2 - 11X + 24$.
11. Retrouver l'expression de u_n obtenue en partie II.
12. Retrouver ensuite, à l'aide de la relation $(*)$ de la question 9, l'expression de v_n .

Exercice 2

I. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - 1 + x$.

On considère également la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}$.

1. (a) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
 (b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x , le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 (b) Montrer que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.
 (b) Établir le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites.

II. Représentation graphique

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$.

4. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
5. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x + 1)$. Interpréter graphiquement cette limite.
6. Tracer sur le même graphique $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

III. Calcul d'une intégrale

7. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^2 ((x+1) - f(x)) dx.$$

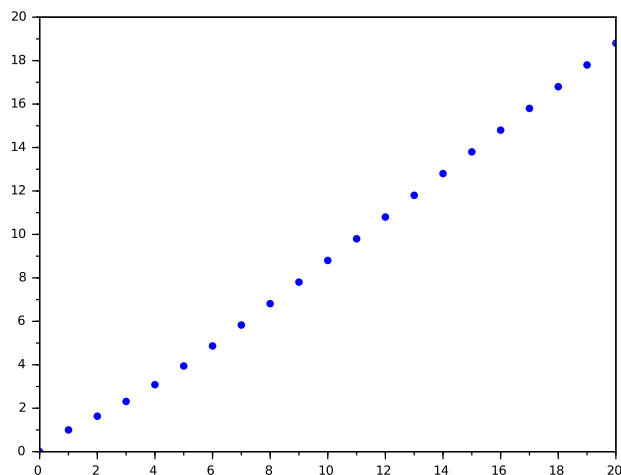
On pourra remarquer que $\frac{x}{e^x} = xe^{-x}$.

8. De quelle surface cette intégrale donne-t-elle la valeur ? On fera apparaître cette surface (en la hachurant) sur le graphique.

IV. Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

9. (a) Écrire une fonction **suite(n)** qui prend en argument un entier n et renvoie la valeur de u_n .
 (b) Le tracé ci-dessous représente les premiers termes de cette suite. Que semble-t-il indiquer quant au comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini ?



10. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$.
 (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
 (d) Conclure en démontrant l'observation faite sur le graphique à la question 1.(b).