

Feuille d'exercices n°2 : Compléments sur les suites et les séries

1 Méthodes de base

Exercice 1. – Application des règles de base sur les limites – Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = e^{1/n}$

3. $u_n = \frac{1}{1 - (2/3)^n}$

5. $u_n = \frac{2^n}{1 - (3/2)^n}$

2. $u_n = \ln(n^2) - e^{-n}$

4. $u_n = \frac{1}{1 - (3/2)^n}$

6. $u_n = \frac{1 - (1/2)^n}{(1/2)^n + (2/3)^n}$

Exercice 2. – Sommes finies usuelles – Déterminer chacune des sommes suivantes en fonction de n .

1. $\sum_{k=2}^n \frac{2^k}{3^{k+1}}$

2. $\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}k + 1 \right)$

3. $\sum_{k=2}^n (k^2 + 3k + 1)$

Exercice 3. – Sommes de séries usuelles – Déterminer la somme de chacune des séries suivantes (on justifiera brièvement leur convergence).

1. $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{2^{k-1}}$

2. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$

3. $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^{k-1}}{k!}$

4. $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3k^2}{2^{k-1}}$

Exercice 4. – Application du théorème des suites monotones bornées – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 6x + 1}{9}$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par : $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

4. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [0, \alpha]$.

2. Montrer que f admet un unique point fixe dans $[0, 1]$ (on le notera α).

5. Étudier la monotonie de (u_n) .

3. Étudier la fonction f sur $[0, 1]$.

6. Montrer la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 5. – Application de l'IAF – On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4}$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$.

1. Montrer que pour tout n , $u_n \in [0, 1]$.

dans $[0, 1]$ et donner la valeur de α .

2. Calculer u_1 , u_2 . La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle monotone ?

5. Montrer que pour tout $n \geq 0$,
 $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

6. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$
et conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n \geq 0}$.

4. Montrer que f admet un unique point fixe α

Exercice 6. – Déterminer un équivalent à partir des équivalents classiques – Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

$$1. u_n = \frac{n^2 + 4n - 4}{\sqrt{n} + 3} \quad 2. u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \quad 3. u_n = \frac{e^{1/n} - 1}{n} \quad 4. u_n = n^2 \ln(1 + 1/n)$$

Exercice 7. – Déterminer un équivalent à partir d'un DL2 – Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

$$1. u_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + 1/n), \quad 2. u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 + \frac{2}{n}$$

Exercice 8. – Déterminer une limite grâce à un équivalent – Déterminer les éventuelles limites des suites suivantes.

$$1. u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n + 1} \quad 2. u_n = \sqrt{n} (e^{1/n} - 1) \quad 3. u_n = n \left(\sqrt{1 + 1/n} - 1 \right)$$

Exercice 9. – Étudier la convergence d'une série grâce à un équivalent ou une négligeabilité – Étudier la convergence des séries dont le terme général est le suivant.

$$1. u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n + 1} \quad 3. u_n = \sqrt{n} (e^{1/n} - 1) \quad 5. u_n = \frac{n}{e^n}$$

$$2. u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{-n^3 + 1} \quad 4. u_n = \frac{(\sqrt{1 + 1/n} - 1)}{n} \quad 6. u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$$

2 Équivalents et limites de suites

Exercice 10. – Classer les suites dont on donne les termes généraux ci-dessous par ordre de négligeabilité :

$$1. \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}, \frac{1}{n \ln n}, \quad 2. n^2, \sqrt{n}, \frac{e^n}{n}, \frac{n^2}{\ln n}, n \ln(n).$$

Exercice 11. – Déterminer pour chaque couple de suites suivant (définies sur $\mathbb{N}^*$) laquelle est négligeable devant l'autre.

$$1. u_n = \ln(n) + n^2, v_n = \ln(n^3) \quad 2. u_n = e^{n/4}, v_n = n^2 \quad 3. u_n = e^{-n} + \ln(n), v_n = n$$

Exercice 12. – Déterminer des équivalents (les plus simples possibles) des suites (u_n) définies par :

$$1. u_n = n^3 + e^n + n\sqrt{n}, \quad 2. u_n = \frac{n}{\ln(n) + n^2}, \quad 3. u_n = \sqrt{e^{\frac{1}{n}} - 1},$$

Exercice 13. – –

- Montrer que pour tout entier naturel non nul, l'équation $e^x + x = n$ admet une unique solution, que l'on notera u_n .
- Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n \geq 1}$ et déterminer sa limite.
- Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \ln(n)$.
- Montrer que pour n assez grand, $u_n \geq \ln(n) - 1$.
- En déduire un équivalent simple de u_n .

3 Études de séries

Exercice 14. – Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n^2+1}{2n^3+1},$
3. $\sum \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}},$
4. $\sum e^{-n},$
6. $\sum \frac{\ln n}{n^2},$
2. $\sum \frac{\sqrt{n}+1}{-n^2+1},$
5. $\sum \frac{n^3}{e^n},$
7. $\sum \sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3}.$

Exercice 15. – Déterminer la nature des séries suivantes suivant la valeur $a > 0$:

1. $\sum \frac{1+n}{n^a+1},$
2. $\sum \frac{1}{n^a+n+1},$
3. $\sum \frac{\ln n}{n^a}.$

Exercice 16. – Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est à termes strictement positifs et en déduire la convergence de la suite (u_n) ainsi que sa limite.
2. Montrer que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ diverge à l'aide d'un télescopage.
3. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 17. – Série harmonique – Le but de l'exercice est de montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. On déterminera un équivalent de la suite de ses sommes partielles. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

2. Etudier la fonction $x \mapsto x + \ln(1-x)$. En déduire que (u_n) est décroissante.
3. Soit $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$$

- (b) En déduire, comme pour (u_n) , que (v_n) est croissante.

- (c) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Que peut-on en déduire ?

4. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_n$ est équivalente à $\ln n$.

5. Conclure quant à la convergence de la série harmonique ainsi que celle des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha < 1$.

Exercice 18. – Convergence de la série exponentielle –

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes positifs. On suppose qu'il existe un réel $l \in]0, 1[$ tel qu'à partir d'un certain rang n_0 on ait $u_{n+1} \leq l u_n$.

- (a) Montrer qu'alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq l^{n-n_0} u_{n_0}$.
 (b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \geq 0$, $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

- (a) Montrer qu'il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{1}{2}$.
 (b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 19. – Le but de cet exercice est de montrer la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$.

1. Montrer l'inégalité :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right)_n$.

2. Montrer que pour $n \geq 0$ et $t \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

4. Conclure.