Corrigé du DM n°2

À rendre le 04/11/2024

Exercice 1

Partie I : Étude d'une suite.

1. On a
$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et
$$D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

2. Comme $PQ = I_2$, P est inversible et $P^{-1} = Q$.

3. Soit $n \geq 1$.
$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \dfrac{1}{3}u_{n+1} + \dfrac{2}{9}u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n .$$
Par ailleurs, $PY_n = PQX_n = I_2X_n = X_n$ et
$$Y_{n+1} = QX_{n+1} = QAX_n = QAPY_n = DY_n .$$

4. On effectue un raisonnement par récurrence. Notons, pour $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$ la propriété $Y_n = D^{n-1}Y_1$.
   - Initialisation : $D^{1-1}Y_1 = I_2Y_1 = Y_1$; donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
     On a alors $Y_{n+1} = DY_n$;
     mais par hypothèse de récurrence $Y_n = D^{n-1}Y_1$,
     donc $Y_{n+1} = DD^{n-1}Y_1 = D^nY_1$;
     donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : En application du principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

5.
$$Y_1 = QX_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{4}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{27} \\ \dfrac{4}{27} \end{pmatrix} .$$
$$Y_n = D^{n-1}Y_1 = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{4}{27} \\ \dfrac{4}{27} \end{pmatrix} = \frac{4}{27}\begin{pmatrix} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} .$$

6. On a alors, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{4}{27} \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{4}{27} \begin{pmatrix} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} .$$

On en déduit que

$$u_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right] .$$

Partie II : Probabilités discrètes.

1. (a)
```
def Ber(p):
    tir=rd.random()
    if tir < p  :
        X = 1
    else :
        X = 0
    return X
```
(b)
```
\begin{verbatim}
p = 2/3 # Probabilité d'obtenir pile à chaque lancer
a = Ber(p) #premier tirage :
b = Ber(p) # deuxième tirage
n=2 # nombre de tirages effectués
# Tout au long de la boucle qui suit,
# a vaut 1 si le tirage n-1 a donné Pile et
#  b vaut 1 si le tirage n a donné Pile
while a == 0 or  b == 0 :
    n = n+1
    a = b
    b = ber(p)

print( "rangs auxquels est apparu le premier double pile : ")
print ([n-1 ,n] )
```

2. $v_2 = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = P(\overline{F_1})P(\overline{F_2})$ (par indépendance) ; donc $v_2 = (2/3)^2 = 4/9$.
$v_3 = P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) = (1/3).(2/3).(2/3) = 4/27$.
On a :
$$\frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1 = \frac{1}{3}.\frac{4}{9} = \frac{4}{27} = v_3 .$$

3. Soit $n \geq 2$. Si au premier lancer on a obtenu PILE, la réalisation de l'événement D_{n+2} nécessite l'obtention d'un FACE au deuxième lancer.
Il reste ensuite n lancers et tout se passe comme si on reprenait au début ; c'est à dire la probabilité de D_{n+2} sachant $\overline{F_1}$ et F_2 est égale à la probabilité de D_n.
On en déduit que:
$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = P_{\overline{F_1}}(F_2 \cap D_{n+2}) = P_{\overline{F_1}}(F_2)P_{\overline{F_1}\cap F_2}(D_{n+2}) = P_{\overline{F_1}}(F_2)P(D_n) = \frac{1}{3}v_n .$$

4. Pour $n \geq 2$, si F_1 s'est produit, il reste $n+1$ lancers pour parvenir à D_{n+2} et tout se passe comme si on avait repris à zéro. Donc
$$P_{F_1}(D_{n+2}) = P(D_{n+1}) = v_{n+1}.$$

5. Soit $n \geq 2$. Les événements F_1 et $\overline{F_1}$ forment un système complet ; on a donc, d'après la formule des probabilités totales,
$$v_{n+2} = P(D_{n+2}) = P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) + P(F_1)P_{F_1}(D_{n+2}) \ .$$
En utilisant les questions précédentes,
$$v_{n+2} = \frac{2}{3}\frac{1}{3}v_n + \frac{1}{3}v_{n+1} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n \ .$$

6. La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ vérifie les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\geq 1}$; ces deux suites sont donc égales. On déduit donc de la partie **I** que pour tout $n \geq 1$,
$$P(D_n) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

7. $$\overline{E_n} = D_1 \cup \cdots \cup D_n \ ;$$
cette union étant disjointe. On en déduit que
$$1 - P(E_n) = \sum_{k=1}^{n} P(D_k).$$
et donc
$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k \ .$$

8. On a
$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] = \frac{4}{9}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{4}{9}\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad ;$$
d'où
$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \frac{4}{9}.\frac{2}{3}.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}.\frac{-1}{3}.\frac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{-1}{3}} = \frac{8}{9}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right) \ .$$
Et donc
$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k = \frac{8}{9}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{9}\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right) \ .$$
Or
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} = 0 \ ;$$
d'où
$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0 \ .$$

Exercice 2 (facultatif)

D'après EDHEC E 2007

1. (a)
```python
import numpy.random as rd
def lancer():
    a = rd.random()
    if a < 1/2  :
        L = 1
    else:
        L = 0
    return L
```

   (b)
```python
Z = 1 # nombre de lancers effectu\'es
L = lancer() # r\'esultat du premier lancer
while L != 1:
    Z = Z+1
    L = lancer()

print(Z)
```

```python
Z = 1 # nombre de lancers effectu\'es
L = lancer() # r\'esultat du premier lancer
while L != 1:
    Z = Z+1
    L = lancer()

X = rd.randint(1,Z)
print(X)
```

2. Comme $0 \leq \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et que la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ est convergente, alors par comparaison de séries à termes positifs :

   Conclusion : $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ est convergente}}$

3. Z est le rang du premier pile dans une suite de lancers indépendants ayant tous la probabilité $\frac{1}{2}$ de donner pile donc

   Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et donc } E(Z) = 2 \text{ et } V(Z) = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2}$

4. (a) Pour tout (i,k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, sachant $Z = k$, les numéros de 1 à k sont équiprobables.

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{Z=k}(X = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > k \\ \frac{1}{k} & \text{si } i \in [[1,k]] \end{cases}}$

(b) Comme $(Z = k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = i) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}_{Z=k}(X = i)\,\mathrm{P}(Z = k) \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} 0 + \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

découpage valide pour $i - 1 \geq 1$ mais le résultat reste exact pour $i = 1$ où le découpage de la somme est inutile.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}^*}$

(c) On calcule la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = i) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} 1\right] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Conclusion : $\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = i) = 1}$

5. (a) Pour majorer $\mathrm{P}(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ on majore son contenu :

Pour tout $k \geq i$: $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et donc

$$i\mathrm{P}(X = i) \leq \sum_{k=i}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

On en déduit

$$i\mathrm{P}(X = i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{1 - 1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} .$$

Conclusion : $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^* : i\mathrm{P}(X = i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}}$

(b) On a donc $0 \leq |i\mathrm{P}(X=i)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ et comme la série $\sum_{i\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ converge alors par majoration de termes positifs, la série $\sum_{i\geq 1} i\mathrm{P}(X=i)$ converge absolument

Conclusion : $\boxed{X \text{ a une espérance.}}$

(c) On a alors

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathrm{P}(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\left[i\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right] \text{ et en permutant} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\sum_{i=1}^{k} i\right] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\frac{k(k+1)}{2}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right) \text{ réindexé } h=k+1 \\
&= \sum_{h=2}^{+\infty} h\left(\frac{1}{2}\right)^{h} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On a bien } E(X) = \frac{3}{2}}$

6. (a) Comme $i^2\mathrm{P}(X=i) \leq i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ dont la série converge, alors par majoration de termes positifs, la série $\sum_{i\geq 1} i^2\mathrm{P}(X=i)$ converge absolument

Conclusion : $\boxed{X^2 \text{ a donc une espérance et } X \text{ a un moment d'ordre 2}}$

(b) Et comme précédemment :

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i^2\mathrm{P}(X=i) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\sum_{i=1}^{k} i^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right] \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}
\end{aligned}$$

(c) On développe de part et d'autre :

$$\begin{array}{rcl} (k+1)(2k+1) & = & 2k^2+3k+1 \\ ak(k-1)+bk+c & = & ak^2+(b-a)k+c \end{array}$$

Donc pour $c=1$: $a=2$ et $b=3+a=5$ on a

Conclusion : $\boxed{2k(k-1)+5k+1=(k+1)(2k+1)}$

(d) On a alors

$$\begin{array}{rcl} E\left(X^2\right) & = & \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(2k(k-1)+5k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ & = & \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+\frac{5}{6}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\frac{1}{6}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k-1\right] \\ & = & \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}+\dfrac{5}{6}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{6}\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right] \\ & = & \dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{6} \\ & = & \dfrac{19}{6} \end{array}$$

Et

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=\frac{19}{6}-\frac{9}{4}=\frac{11}{12}\ .$$

Conclusion : $\boxed{V(X)=\dfrac{11}{12}}$

7. (a) Pour $x\neq 1$ et $n\in\mathbb{N}on$ a :

$$\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\sum_{h=0}^{n-1}x^h=\frac{1-x^n}{1-x}$$

(b) Soit donc pour tout $x\neq 1$: $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$ continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ donc

$$\int_0^{1/2}f(x)\,dx=\int_0^{1/2}\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}dx=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^{1/2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\ .$$

Et d'autre part

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^{1/2}f(x)\,dx & = & \displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1-x^n}{1-x}dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x}dx-\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}dx \\ & = & \left[-\ln(1-x)\right]_0^{1/2}-\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}dx \\ & = & \ln(2)-\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}dx \end{array}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx}$

(c) Sur $[0, 1/2]$ on encadre le contenu :

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et} \\ \frac{1}{2} &\leq 1 - x \leq 1 \text{ donc} \\ 0 &\leq \frac{1}{1-x} \leq 2 \\ 0 &\leq \frac{x^n}{1-x} \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

et comme $0 \leq \frac{1}{2}$ (bornes) on obtient

$$0\frac{1}{2} \leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx \leq \frac{1}{2}2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

et par encadrement ($|1/2| < 1$ donc $(1/2)^n \to 0$) $\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx \to 0$ quand $n \to +\infty$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx = 0}$

(d) On revient à

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx \\ &\to \ln(2) \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2)$ ce qui est

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X = 1) = \ln(2)}$

On a $\mathrm{P}(X = 2) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X = 2) = \ln(2) - \frac{1}{2}}$

(e) L'événement $(X \geq 3)$ est l'événement contraire de $(X = 1 \cup X = 2)$ donc $\mathrm{P}(X \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(X = 1) - \mathrm{P}(X = 2)$ et

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X \geq 3) = \frac{3}{2} - 2\ln(2)}$

On obtient comme valeur approchée :

$$\mathrm{P}(X \geq 3) \simeq 1,5 - 1,4 \simeq 0.1$$