

Corrigé des Exercices complémentaires de rentrée

Exercice 1

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. La fonction f est dérivable car quotient de fonction dérivables. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x)$ est du signe de x^2+2x .

On obtient ainsi

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

3. En $\pm\infty$:

$$f(x) = \frac{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x(1 + \frac{1}{x})} = x \cdot \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

En -1 :

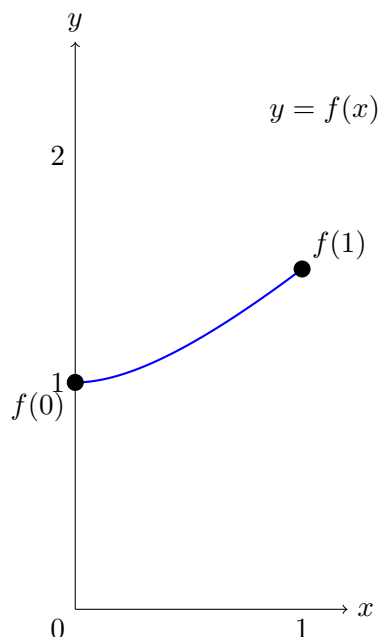
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0^- \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	-3	1	$+\infty$

Représentation graphique de $y = f(x)$ sur $[0, 1]$:



4. La division euclidienne donne : $X^2 + X + 1 = (X + 1)X + 1$.

On obtient ainsi, pour $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \, dx &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln(x+1) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \ln(2) \end{aligned}$$

Exercice 2 : Fonctions hyperboliques

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la seconde comme composée de $x \mapsto -x$ et de $x \mapsto e^x$. Les fonctions ch et sh , sommes de fonctions de classe C^∞ , sont donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$sh'(x) = \frac{1}{2} (e^x - (-e^{-x})) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x), \quad ch'(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = sh(x).$$

Tableau de variations : voir question suivante.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$sh'(x) = ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$$

donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, sh est continue et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} sh(x) = -\infty.$$

Par le théorème de la bijection continue, sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{x \rightarrow -\infty} sh(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x)[$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ch^2(x) - sh^2(x) &= \frac{1}{4} [(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2] \\ &= \frac{1}{4} [e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})] \\ &= 1. \end{aligned}$$

5. a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$sh(Argsh(x)) = x.$$

En dérivant les deux membres de cette égalité, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Argsh'(x) \times sh'(Argsh(x)) = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad Argsh'(x) \times ch(Argsh(x)) = 1.$$

Or, d'après la question 4 :

$$ch^2(Argsh(x)) - sh^2(Argsh(x)) = 1 \quad \text{donc} \quad ch^2(Argsh(x)) = 1 + x^2.$$

Comme ch est à valeurs positives :

$$ch(Argsh(x)) = \sqrt{1 + x^2}.$$

On en déduit :

$$Argsh'(x) \times \sqrt{1 + x^2} = 1 \quad \text{donc} \quad Argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

b) Notons $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, définie sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}(x + \sqrt{1 + x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

c) Les fonctions f et $Argsh$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont la même dérivée : elles diffèrent donc d'une constante c :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Argsh(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + c.$$

En 0 : $Argsh(0) = 0$ (car $sh(0) = 0$) et $\ln(0 + \sqrt{1 + 0^2}) = \ln 1 = 0$, donc $c = 0$.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Argsh(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

d) La fonction f_a est continue sur $[0, 1]$ et à valeurs positives (si $a > 0$). De plus :

$$\int_0^1 \frac{a}{\sqrt{1 + x^2}} dx = a [Argsh(x)]_0^1 = a Argsh(1).$$

Pour que f_a soit une densité de probabilité, on doit donc avoir :

$$a = \frac{1}{Argsh(1)} = \frac{1}{\ln(1 + \sqrt{2})}.$$

Exercice 3

1. **Positivité de la suite.**

- $u_0 = 1 \geq 0$.
- Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
Alors $e^{u_n} \geq 1$, c'est-à-dire $e^{u_n} - 1 \geq 0$, et donc $u_{n+1} \geq 0$.
- En application du principe de récurrence, on a $u_n \geq 0$ pour tout entier n .

2. f est dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0.$$

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 0$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x - x - 1 \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad e^x \geq x + 1.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = e^{u_n} - 1 - u_n = f(u_n).$$

Or $u_n \in \mathbb{R}_+$ (question 1), donc $f(u_n) \geq 0$ (question 2), d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

4. Supposons que (u_n) converge vers une limite finie ℓ . Alors, comme $g : x \mapsto e^x - 1$ est continue, ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$ (d'après le théorème du point fixe).

On résout (sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff e^x - 1 = x \\ &\iff f(x) = 0. \end{aligned}$$

D'après la question 2 (en précisant que, pour $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ et donc que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$), la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ est 0.

Conclusion : si (u_n) admet une limite finie, celle-ci vaut 0.

Suite du 4. Comme (u_n) est croissante, on a l'alternative suivante :

- ou bien (u_n) converge vers une limite finie ;
- ou bien (u_n) tend vers $+\infty$.

Si (u_n) convergerait, sa limite serait 0. Cela n'est pas possible car $u_0 = 1 > 0$ et (u_n) est croissante.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

5. $u_1 = e^{u_0} - 1 = e - 1$; $u_2 = e^{e-1} - 1 \simeq 4,6$. Donc $u_2 > 2$.

De plus $f(2) = e^2 - 3 \simeq 4,38$.

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que, pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq f(2) \geq 1$, c'est-à-dire

$$e^x - x - 1 \geq 1 \quad \text{soit} \quad e^x - 1 \geq x + 2 \geq x + 1. \quad (*)$$

6. On a $u_1 \geq 1$ et $u_2 \geq 2$.

Supposons, pour un certain $n \geq 2$, $u_n \geq n$. Alors, d'après (*),

$$e^{u_n} - 1 \geq u_n + 1 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} \geq u_n + 1 \geq n + 1.$$

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq n$.

7. — En $+\infty$,

$$\frac{x^3}{e^x - 1} \sim \frac{x^3}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées.

— Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que

$$\frac{u_n^3}{e^{u_n} - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{u_n^3}{u_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

— Ainsi, à partir d'un certain rang n_0 , $\frac{u_n^3}{u_{n+1}} \leq 1$, c'est-à-dire

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

— De plus, d'après la question 6, $u_n \geq n$. On en déduit que, pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq \frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

— Comme la série de terme général (s.t.g.) $\frac{1}{n^2}$, $n \geq n_0$, converge, par comparaison la s.t.g. $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ converge (remarque : cela ne dépend pas de l'indice de départ).

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx.$$

1. Notons $f : x \mapsto (x+1)(\ln(x+1) - 1)$, définie sur $[0, 1]$.
 f est dérivable sur $[0, 1]$ et, pour $x \in [0, 1]$:

$$f'(x) = \ln(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} = \ln(x+1).$$

Ainsi f est une primitive de $x \mapsto \ln(x+1)$ sur $[0, 1]$, donc :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \ln(x+1) dx = [f(x)]_0^1 \\ &= 2(\ln 2 - 1) - (-1) \\ &= 2\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

2. On écrit

$$I_1 = \int_0^1 x \ln(x+1) dx = \int_0^1 u(x) v'(x) dx$$

avec

$$u(x) = \ln(x+1), \quad u'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad v'(x) = x, \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$; on peut donc appliquer la formule d'intégration par parties, qui donne :

$$\begin{aligned} I_1 &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)} dx \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)} dx. \end{aligned}$$

3. En faisant une intégration par parties similaire à la précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \\ &= \frac{\ln 2}{n+1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)} dx. \end{aligned}$$

4. Soit $n \geq 0$.

— Pour $x \in [0, 1]$, $\frac{x^{n+1}}{x+1} \geq 0$, donc $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx \geq 0$. On en déduit :

$$I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

— On a, d'après la question 3 :

$$\begin{aligned} I_n \geq \frac{2\ln 2 - 1}{n+1} \quad (*) &\iff \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx \geq \frac{2\ln 2 - 1}{n+1} \\ &\iff -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx \geq \frac{\ln 2 - 1}{n+1} \\ &\iff \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx \leq 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

Or on réécrit :

$$1 - \ln 2 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (*) &\iff \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq 0 \\ &\iff \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x}{x+1} dx \leq 0. \end{aligned} \quad (**)$$

Or, pour $x \in [0, 1]$, $x^{n+1} - x = x(x^n - 1) \leq 0$. Donc $(**)$ est vraie, et donc $(*)$ est vraie.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2 \ln 2 - 1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

— Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln 2 - 1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$, on en déduit, par encadrement, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

— Comme $I_n \geq \frac{2 \ln 2 - 1}{n+1}$ pour tout n et que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2 \ln 2 - 1}{n+1}$ diverge (série harmonique), on en déduit, par comparaison des séries à termes positifs, que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n \text{ diverge.}$$

5. (a) Soit $x \in]0, 1[$. Pour $n+1$ impair :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)}.$$

Comme $n+1$ est impair, $(-x)^{n+1} = (-1)^{n+1} x^{n+1} = -x^{n+1}$, et donc

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \frac{1 + x^{n+1}}{1 + x}.$$

(b) En utilisant le résultat de la question 3, on a :

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx.$$

Or, d'après (a) :

$$\frac{x^{n+1}}{x+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x} + \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \right) dx \\ &= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[-\int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^k dx \right] \\ &= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[-\ln 2 + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right] \\ &= \frac{2 \ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.