

Exercices complémentaires de rentrée

Ces exercices viennent compléter la feuille de révisions pour la rentrée. Cette dernière est constituée d'applications directes du cours de première année. Les exercices ci-dessous commencent généralement par quelques questions d'application directe du cours. Les questions suivantes demandent souvent plus d'initiative.

Exercice 1 (Etude de fonction, division euclidienne, calcul intégral)

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

1. Préciser le domaine de définition de f .
2. Calculer la dérivée de f sur son domaine de définition. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition (y compris les limites), puis tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, 1]$.
4. Effectuer la division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par $X + 1$. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Exercice 2 (Etude de fonction, théorème de la bijection continue, dérivée de la bijection réciproque, densité de probabilité)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

$$f_a : x \mapsto \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de déterminer a tel que f_a soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions :

$$\text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et

$$\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Justifier que les fonctions sh et ch sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer les dérivées de sh et ch en fonction de sh et ch . En déduire le tableau de variations de sh .
3. Justifier proprement que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note désormais Argsh sa fonction réciproque.

4. Vérifier pour tout réel x la relation $(\operatorname{ch}x)^2 - (\operatorname{sh}x)^2 = 1$.
5. a) Montrer que Argsh a pour dérivée :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- b) Calculer, après avoir justifié sa dérivabilité, la dérivée de

$$x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

- c) En déduire une expression de $\operatorname{Argsh}(x)$ (on pourra remarquer que $\operatorname{Argsh}(0) = 0$).
- d) Déterminer a tel que f_a soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Récurrence, étude de fonction, convergence et limite d'une suite récurrente, convergence d'une série par comparaison à $\sum \frac{1}{n^2}$)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

1. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite à termes positifs.
2. Soit $f : x \mapsto e^x - x - 1$. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (on pourra dresser son tableau de variations). En déduire l'inégalité :

$$\forall x \geq 0, e^x \geq x + 1.$$

3. Montrer, à l'aide du résultat de la question précédente, que la suite (u_n) est croissante.
4. Montrer que si (u_n) converge, alors sa limite est 0. En déduire que (u_n) est divergente et donner sa limite.
5. A l'aide de python, vérifier $u_1 > 2$ et calculer $f(2)$. En déduire que pour tout $x \geq 2$ on a $e^x - 1 \geq x + 1$.
6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq n$.
7. Justifier que $x \mapsto \frac{x^3}{e^x - 1}$ a pour limite 0 en $+\infty$. En déduire que $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{u_n^2}$ pour n assez grand. Montrer que la série de terme général

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}$$

est convergente.

Exercice 4 (Calcul intégral, intégration par parties, croissance de l'intégrale, théorème d'encadrement, critère de comparaison pour les séries à termes positifs, somme des termes d'une suite géométrique)

$$\text{Soit } I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx.$$

1. Calculer l'expression de la dérivée de $x \mapsto (x+1)(\ln(x+1) - 1)$. En déduire I_0 .

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$I_1 = \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)} dx.$$

3. Montrer, en procédant de même que dans la question précédente, que

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx.$$

4. Montrer l'encadrement :

$$\frac{2\ln 2 - 1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

En déduire que la suite (I_n) converge et préciser sa limite. La série de terme général I_n converge-t-elle ?

5. On se donne dans cette question un entier naturel n pair de la forme $n = 2M$ où $M \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{x^{n+1} + 1}{x + 1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k.$$

b) En déduire l'expression :

$$I_n = \frac{1}{n+1} \left(2\ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right).$$

Exercice 5 (Applications linéaires, noyau, matrices inversibles)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

On note f l'application de $E = M_{3,1}(\mathbb{R})$ dans E définie par $X \mapsto AX$.

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $f(X)$. En déduire que le noyau de f n'est pas réduit à la colonne nulle.

3. Déterminer une base de l'image de f .

4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 1 & 1 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

b) Calculer la matrice $P^{-1}AP$.

5. Déterminer une matrice B telle que $B^2 = A$.

6. Soit C une matrice telle que $C^2 = A$. On note $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $(P^{-1}CP)^2 = D$. En déduire que $P^{-1}CPD = DP^{-1}CP$.

(b) Montrer que si une matrice M satisfait $MD = DM$ alors M est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$$

et que si $M^2 = D$ on a en plus $a = 0$.

7. Montrer qu'il existe une infinité de matrices C telles que $C^2 = A$ (on pourra donner une suite (C_n) explicite de matrices toutes distinctes telles que $(C_n)^2 = A$ pour tout n).

Exercice 6 (Matrices inversibles, systèmes linéaires, calcul matriciel, récurrence, propriétés du logarithme népérien)

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ t & u & v \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 . En déduire l'inverse de A .

2. Calculer AB et BA . En déduire des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t, u et v pour que A et B commutent. On suppose désormais ces conditions vérifiées.

3. Montrer que B est inversible si et seulement si $x \neq 0$. Calculer son inverse dans ce cas.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n et b_n les réels tels que :

$$B^{2^n} = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} = a_n^2 \text{ et } b_{n+1} = (1 + a_n)b_n.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = x^{2^n},$$

$$b_n = \prod_{k=1}^n (1 + x^{2^{k-1}}) z.$$

5. On suppose désormais $x = z = \frac{1}{2}$.

a) Préciser le comportement asymptotique de la suite (a_n) .

- b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$. En déduire que la suite de terme général $\ln b_n$ et donc que la suite (b_n) admet une limite finie ℓ . Préciser un majorant de ℓ .

Exercice 7 (probabilités finies, probabilités conditionnelles, lois classiques, propriétés de l'espérance)

On prend une urne dans laquelle on a une boule noire. On considère l'expérience suivante :

- On lance un dé équilibré à 4 faces (tétraédrique). On note D son résultat.
- On met D boules blanches dans l'urne.
- On tire au hasard une boule dans l'urne. On pose $X = 1$ si on a pris une boule blanche et $X = 0$ si on a pris la boule noire.

1. Donner la loi de D , ainsi que son espérance et sa variance.
2. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{D=d}(X = x)$ pour tout $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ et tout $x \in \{0, 1\}$.
3. Calculer $P_{X=1}(D = 2)$.
4. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.
5. On répète l'expérience n fois, en enlevant entre chaque itération les boules blanches de l'urne et on note Y la somme des X obtenus. Quelle est la loi de Y ? Préciser son espérance et sa variance.
6. On répète comme dans la question précédente l'expérience, mais jusqu'à piocher la boule noire. Quelle est la loi et l'espérance du nombre N d'expériences effectuées ?
7. On considère, dans les mêmes conditions que précédemment avec n itérations, de nouvelles variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_n$ et Z où Z_i est égal au résultat du dé de la i -ième expérience multiplié par 1 si on a pioché une boule blanche et par -1 sinon et où $Z = \sum_{i=1}^n Z_i$.

Déterminer l'espérance de Z .

Exercice 8 (Loi de Poisson, loi géométrique, probabilités conditionnelles, probabilités totales)

On considère dans cet exercice une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre 1 ainsi qu'une variable aléatoire Y de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On supposera que pour tous k_1 et k_2 les événements $(X = k_1)$ et $(Y = k_2)$ sont indépendants.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Rappeler les probabilités $P(X = k)$ et $P(Y = k)$ (on distinguera le cas $k = 0$ à part pour Y).
2. Calculer les probabilités $P(X \geq 1)$ et $P(X \geq 2)$.
3. Calculer $P_{(X \geq 1)}(X \geq 2)$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'égalité :

$$P(Y \leq k) = 1 - (1 - p)^k.$$

5. Déduire de la question précédente la valeur de la probabilité $P(Y > k)$ puis de $P(Y \geq k)$.

6. Vérifier que pour tous k_1 et k_2 on a :

$$P_{(Y \geq k_1)}(Y \geq k_1 + k_2) = P(Y \geq k_2)$$

On dit que Y est sans mémoire.

7. Montrer à l'aide des questions 2 et 3 que X n'est pas une variable aléatoire sans mémoire.

8. (a) A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(X = k)_{k \in \mathbb{N}}$, calculer la probabilité $P(X = Y)$.

(b) Déterminer la limite de la probabilité calculée à la question précédente quand p tend vers 1. Le résultat obtenu vous paraît-il logique ?

(c) Déterminer la limite quand p tend vers 0. Interprétez le résultat.

Ce dernier exercice est plus difficile.

Exercice 9 (Loi de Poisson, probabilités conditionnelles, lois classiques, probabilités totales)

On considère l'équipe de football de Nohouère sur Houssaie. On suppose qu'à chaque match le nombre de tirs cadrés de l'équipe adverse suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que le gardien a à chaque tir la probabilité $p \in]0, 1[$ d'empêcher le but. On note T le nombre de tirs sur un match donné, et A le nombre de parades du gardien.

1. Soit $t \in \mathbb{N}$. Rappeler l'expression de $P(T = t)$ ainsi que l'espérance et la variance de T .
2. Expliquer la signification de $P_{T=t}(A = a)$.
3. Déterminer pour tout $(t, a) \in \mathbb{N}^2$ la valeur de $P_{T=t}(A = a)$ (on pourra remarquer l'analogie de cette situation conditionnelle avec le cadre d'une loi classique).
4. Déterminer, à l'aide de la formule des probabilités totales, la loi de A , son espérance et sa variance.
5. Soit B la variable aléatoire égale au nombre de buts encaissés par l'équipe sur un match. Déterminer la loi de B .
6. Vérifier que pour tous a et b on a

$$P((A = a) \cap (B = b)) = P(A = a)P(B = b).$$

On dira que A et B sont indépendantes.

7. On ne suppose plus que T suit une loi de Poisson, mais on suppose que A et B sont toujours indépendantes.

a) Montrer que $P(B = 0) \neq 0$ (on pourra commencer par justifier qu'il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $P(T = t)$ est non nul, puis considérer $P((T = t) \cap (A = t))$).

b) On note $u_n = \frac{n!P(A = n)}{p^n}$ et $v_n = \frac{n!P(B = n)}{(1 - p)^n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}v_0 = u_nv_1 = (n + 1)!P(T = n + 1)$$

c) Montrer que A suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

d) Quelle est la loi suivie par B ?