

DS n°2

le 25/09/2026

Durée : 2h

-
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
 - La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
 - Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
 - On encadrera le résultat de chaque question.
-

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue à droite en 0.
- (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que f est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé à droite de f en 0, noté $f'_d(0)$.
2. (a) Déterminer, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, l'expression de $f'(x)$ en fonction de x , où f' désigne la fonction dérivée de f .
- (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis donner les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
- (c) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de f .
- (d) Vérifier que, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a $f''(x) = \frac{1}{x^3}e^{-1/x}$. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}_+$?
3. (a) Calculer $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u}$
- (b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$.
- (c) On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de (C) .
4. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .
- (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.
- (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
- (d) Compléter le programme suivant pour qu'il définisse la fonction `f` et qu'il affiche le rang n à partir duquel $u_n \leq 10^{-3}$.

```
import numpy as np

def f(x):
    return ...

n = 0
u = 1
while ... :
    u = ...
    n = ...

print(...)
```

5. On s'intéresse dans ce qui suit à la série de terme général u_n .

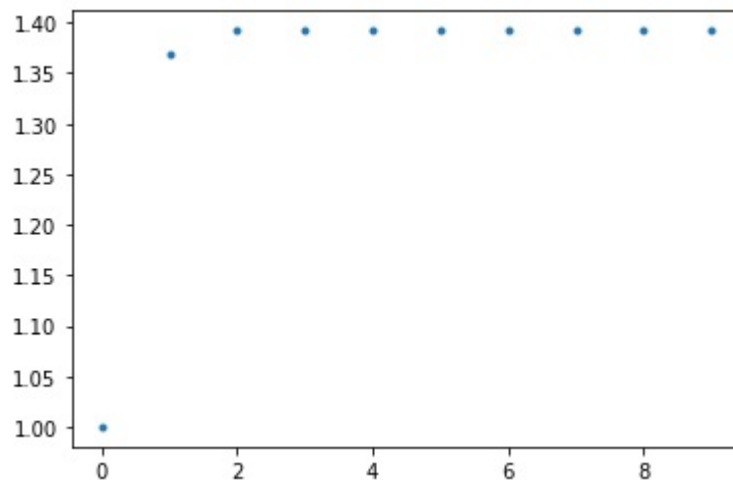
- (a) Compléter le programme informatique suivant afin d'obtenir le graphique représentant les 10 premiers termes de la suite (S_n) des sommes partielles associée à la suite (u_n) :

```
import matplotlib.pyplot as plt

liste_n = [n for n in range(10)]
liste_u = [0 for n in range(10)]
liste_S = [0 for n in range(10)]
liste_u[0] = 1
liste_S[0] = 1
for n in range(1,10):
    liste_u[n] = ...
    liste_S[n] = ...

plt.plot(liste_n,liste_S,','.)
```

- (b) On obtient avec ce programme le graphique suivant :



Que semble indiquer ce graphique quant à la convergence de la série de terme général u_n ?

- (c) Déterminer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire qu'à partir d'un certain rang n_0 , $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
- (d) En déduire qu'à partir de ce rang n_0 , on a

$$u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0} .$$

- (e) Conclure quant à la convergence de la série de terme général u_n .

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

1. Vérifier que $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ et étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $x^3 - 1$.

2. **Étude du signe de g .**

(a) Déterminer la dérivée de g .

(b) Établir le tableau de variations de g .

(c) Déterminer le minimum de g puis donner le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

3. **Limites.**

(a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(b) Déterminer la limite de f en 0.

4. **Représentation graphique de f .**

(a) Démontrer que pour tout x dans $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

(b) Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites.

(c) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à f au point d'abscisse 1.

(d) Tracer sur un même graphique $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$.

On donne $f(2) \simeq 4,5$ et $f(3) \simeq 6,4$.

5. **Étude d'une équation.**

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'équation $(\mathcal{E}_n) : f(x) = 2n$.

(a) Prouver que pour tout $n \geq 1$ $(\mathcal{E}_n)$ admet une unique solution, que l'on notera x_n .

(b) Faire apparaître sur le graphique x_2 .

(c) Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n)$, $f(1)$ et $f(n)$.

En déduire l'encadrement :

$$\forall n \geq 1, \quad 1 \leq x_n \leq n.$$

(d) Justifier que pour tout $n \geq 1$:

$$1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}.$$

(e) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}.$$

(f) En déduire la limite en $+\infty$ de $\frac{x_n}{n}$.