

Corrigé du DS n°2

le 25/09/2026

Durée : 2h

Exercice 1 :

1. (a) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$; donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0$; donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0}$.
 Or $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ entraîne que f est continue à droite en 0.

- (b) Pour tout x strictement positif, $\frac{f(x)}{x} = e^{-1/x}$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0}$.

Or pour x strictement positif, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$.

Ainsi on déduit de ce qui précède que $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = 0}$.

2. (a) La fonction f est dérivable car composée et produit de fonctions dérivables.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = e^{-1/x} \left(1 + x \times \frac{1}{x^2} \right) =$

$$\boxed{f'(x) = e^{-1/x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

- (b) Pour $x > 0$, $\left(1 + \frac{1}{x} \right) > 0$ et $e^{-1/x} > 0$ donc $\boxed{f'(x) > 0}$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- (c) On a vu en Q1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Étudions $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x} = e^0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	0	$+\infty$

On obtient ainsi le tableau de variations :

- (d) Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a

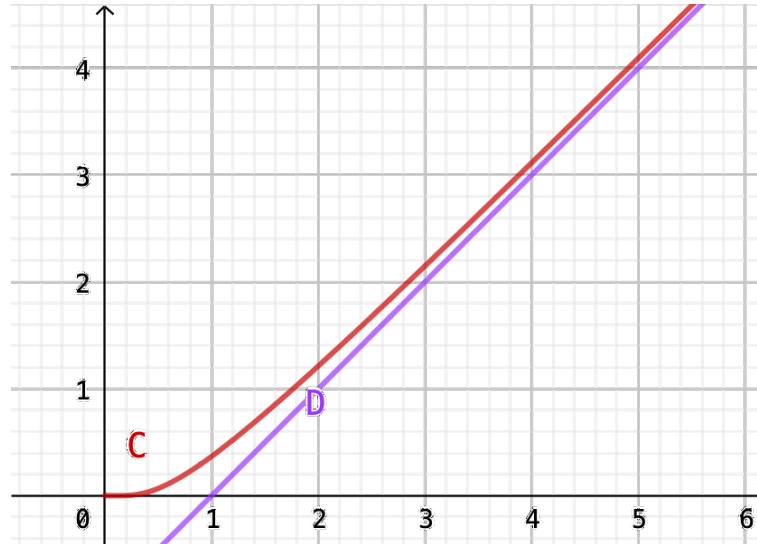
$$f''(x) = \left(\frac{-1}{x^2} + \left(1 + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x^2} \right) e^{-1/x} = \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) e^{-1/x} = \frac{1}{x^3} e^{-1/x}.$$

On en déduit que pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, $f''(x) > 0$, étant le produit de deux facteurs strictement positifs; ainsi $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+}$.

3. (a) Nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

En posant $x = -u$, on trouve $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} = 1$.

- (b) $f(x) - (x - 1) = xe^{-1/x} - x + 1 = \frac{e^{-1/x} - 1}{\frac{1}{x}} + 1$, en posant cette fois $u = \frac{1}{x}$, (x étant strictement positif), alors lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers 0^+ . et $f(x) - (x - 1) = -\frac{e^{-u} - 1}{u} + 1$ et donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = -1 + 1 = 0}$.
- (c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$, (C) admet la droite d'équation $y = x - 1$ pour asymptote (oblique) au voisinage de $+\infty$.



4. (a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , la propriété : $\mathcal{P}(n)$: " $u_n > 0$ " est vraie.

Initialisation : $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$: vraie.

On a alors $u_n > 0$ et, comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(u_n) > f(0) = 0$, donc $u_{n+1} > 0$, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- (b) Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n e^{-1/u_n} - u_n = u_n (e^{-1/u_n} - 1) .$$

Or comme $u_n > 0$, $e^{-1/u_n} < 1$ et donc $e^{-1/u_n} - 1 < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

$\boxed{\text{Donc la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

- (c) $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge car décroissante et minorée.}}$

Comme f est continue, la limite de (u_n) est un point fixe de f .

Or $f(l) - l = 0 \Leftrightarrow l(e^{-1/l} - 1) + 0 \Leftrightarrow (l = 0 \text{ ou } (e^{-1/l} - 1) = 0) \Leftrightarrow l = 0$ car $(e^{-1/l} - 1) < 0$.

On a donc : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

```

import numpy as np

def f(x):
    return x * np.exp(-1/x)

(d) n = 0
    u = 1
    while u > 0.001 :
        u = f(u)
        n = n+1
    print(n)

```

5. (a) On suppose la fonction f définie précédemment toujours connue.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

liste_n = [n for n in range(10)]
liste_u = [0 for n in range(10)]
liste_S = [0 for n in range(10)]
liste_u[0] = 1
liste_S[0] = 1
for n in range(1,10):
    liste_u[n] = f(liste_u[n-1])
    liste_S[n] = liste_S[n-1] + liste_u[n]

plt.plot(liste_n,liste_S, 'r.')

```

(b) Ce graphique semble indiquer que la suite des sommes partielles, et donc la série de terme général u_n , est convergente.

(c) On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1/u_n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1/u_n = -\infty$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

On en déduit qu'à partir d'un certain rang n_0 , $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

(d) Montrons cette propriété par récurrence.

— Au rang $n = n_0$, on a $\frac{1}{2^{n-n_0}} = 1$, donc la propriété est vraie.

— Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq n_0$.

Alors d'après le résultat de la question précédente on a $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ et, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0} \leq \frac{1}{2^{(n+1)-n_0}} u_{n_0} .$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— Conclusion : en application du principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

(e) On a, pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0} .$$

Or la série de terme général $\frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$ est convergente (série géométrique de raison $1/2$).
Donc, par comparaison de séries à termes positifs, on en conclut que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 2

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-x^2-x-1 = x^3-1$.
Le discriminant du trinôme x^2+x+1 est négatif donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 > 0$.
On en déduit que x^3-1 est positif pour $x > 1$ et négatif pour $x < 1$.
2. **Étude du signe de g .**

(a) La fonction g est dérivable car somme de fonctions dérivables. Pour tout x dans $]0; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x} .$$

(b) On a, pour $x > 0$,

$$g'(x) = 6 \cdot \frac{x^3 - 1}{x} ;$$

donc $g'(x)$ est du signe de $x^3 - 1$; d'où le tableau de variations de g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	$\searrow \quad \nearrow$ $g(1)$		

- (c) On a $g(1) = 5$.
Sur $]0; 1]$, g est décroissante et $g(1) > 0$. Donc pour tout $x \in]0; 1]$, $g(x) > 0$.
De même pour tout $x \in [1; +\infty[$, $g(x) > 0$.
Donc tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) > 0$.

3. Limites.

- (a) En raison d'une propriété de croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.
De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty .$$

- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty .$$

De plus $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty .$$

4. Représentation graphique de f .

- (a) La fonction f est dérivable car quotient et somme de fonctions dérivables. Pour tout x dans $]0; +\infty[$,

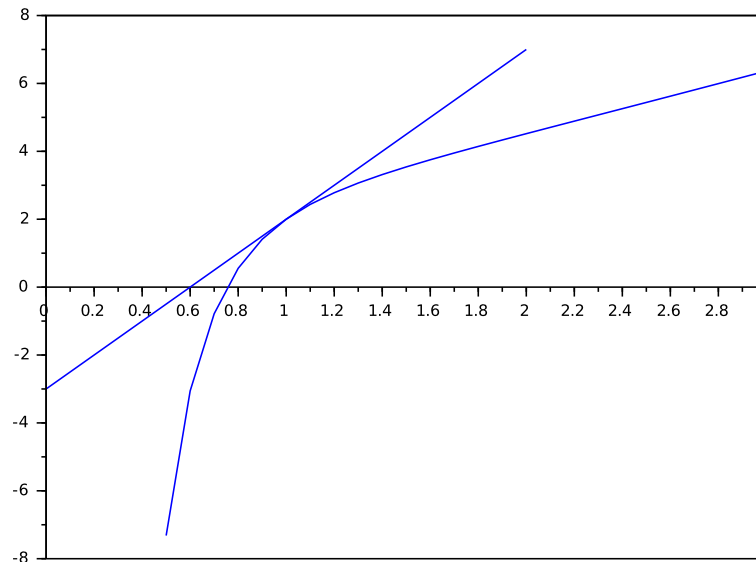
$$f'(x) = 2 + 3 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = 2 + 3 \cdot \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{2x^3}{x^3} + 3 \cdot \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3} = \frac{2x^3 + 3 - 6 \ln(x)}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

- (b) On déduit de la question précédente et du 1. que $f'(x)$ est strictement positif sur $]0; +\infty[$; d'où le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

- (c) La tangente $\mathcal{T}$ à f au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

Or $f(1) = 2$ et $f'(1) = \frac{g'(1)}{1} = 5$. D'où l'équation de la tangente : $y = 5(x - 1) + 2$; c'est à dire $y = 5x - 3$.



(d)

5. Étude d'une équation.

- (a) La fonction f est, sur $]0; +\infty[$, strictement croissante et continue (car quotient et somme de fonctions continue). Donc, d'après le théorème de la bijection continue, f établit une bijection entre $]0; +\infty[$ et $] \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$, c'est à dire $] -\infty; +\infty[$.

Soit alors $n \geq 1$. Comme $2n \in] -\infty; +\infty[$, on déduit de ce qui précède que $(\mathcal{E}_n)$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$.

- (b) x_2 est l'abscisse du point de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnées 4.

- (c) Soit $n \geq 1$. On a $f(x_n) = 2n$ (par définition de x_n), $f(1) = 2$ et $f(n) = 2n + \frac{3 \ln(n)}{n^2}$.
Soit $n \geq 1$.

On remarque que, comme $n \geq 1$, $f(1) \leq f(x_n)$ et $\frac{3 \ln(n)}{n^2} \geq 0$ donc $f(x_n) \leq f(n)$.
Or comme f est croissante elle préserve le sens des inégalités. Donc :

$$1 \leq x_n \leq n .$$

(d) Soit $n \geq 1$. On a alors : $2n = f(x_n) = 2x_n + \frac{3 \ln(x_n)}{(x_n)^2}$; d'où

$$2n - 2x_n = \frac{3 \ln(x_n)}{(x_n)^2} ;$$

d'où, en divisant par $2n$:

$$1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3 \ln(x_n)}{2n(x_n)^2} .$$

(e) Soit $n \geq 1$.

D'une part, comme $x_n \geq 1$, $\frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \geq 0$.

D'autre part, comme $x_n \geq 1$, $\frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \frac{\ln(x_n)}{n}$. Mais comme de plus $x_n \leq n$, $\ln(x_n) \leq \ln(n)$ et donc $\frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}$.

On a donc bien

$$0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \frac{\ln(n)}{n} .$$

(f) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ (croissances comparées).

Donc le résultat de la question précédente et le théorème d'encadrement impliquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} = 0 .$$

mais alors le résultat de la question d) implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{x_n}{n} = 0 ;$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1 .$$

Remarque : on a donc $x_n \sim n$.