

DM n°1

À rendre le 09/10/2026

Exercice 1

Soit a un élément de $]0, 1[$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = a$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Recopier et compléter le script du programme Python suivant, pour qu'il affiche la valeur de u_{100} (on supposera que a vaut 0,5).

```

n = 100
u = .....
...
...

print(.....)

```

2. **Étude la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.**

- (a) Montrer que si $x \in]0, 1[$, alors $x - x^2 \in]0, 1[$.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
- (c) Montrer que (u_n) est décroissante.
- (d) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- (e) Écrire un programme python qui calcule et affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 10^{-3}$ (on supposera que a vaut 0,5).

3. **Étude de la série de terme général u_n^2 .**

- (a) Exprimer u_k^2 en fonction de u_k et u_{k+1} .
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0 - u_{n+1}$.
- (c) En déduire que la la série de terme général u_n^2 est convergente et déterminer sa somme.

4. **Étude de la série de terme général u_n .**

- (a) Montrer que, pour $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$$

- (b) En déduire que la série de terme général $-\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ est divergente.

- (c) Exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puis $-\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ en fonction de u_n .

- (d) En déduire que la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $-\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ et conclure.

Exercice 2 (facultatif)

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{\exp(-x)}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).
- (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. Informatique.

- (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while ..... :
        u=exp(-u)/u
        n=....
    return n
```

- (b) On considère maintenant la fonction Python :

```
def fonc2(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u>a :
        u=exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

Les appels `fonc1(10**6)` et `fonc2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.

Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?

Commenter ce résultat en une ligne.

- (c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .
3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose : $g(x) = \exp(-x) - x^2$.
 - (a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1]$.
 - (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α .
 - (c) Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On rappelle que $e \approx 2,7$.

4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
 (b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 (c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
 (a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.
 (b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
 (c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question 3b.
 (d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Exercice 3 (facultatif)

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

On note f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f_n(x) = xe^{-n/x}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que f_n est continue en 0.
 (b) Montrer que f_n est dérivable (à droite) en 0 et donner la valeur du nombre dérivé en 0 de f_n .
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f'_n(x)$ puis étudier son signe.
 (b) Calculer la limites de f_n en $+\infty$, puis donner le tableau de variation de f_n .
3. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
 (b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- (c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, (C_n) admet une asymptote "oblique" (D_n) dont on donnera une équation.
 Préciser la position relative de (D_n) et (C_n) aux voisinages de $+\infty$.
- (d) Donner l'allure de la courbe (C_1) .
4. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n , tel que $f_n(u_n) = 1$.
 (b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation $x \ln(x) = n$.
 (c) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x \ln x$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1} , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 (d) Justifier la relation $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$, puis montrer que $\ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.
 (e) En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

(b) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = \exp(\frac{1}{u_{n+1}})$.

6. On pose $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt$.

(a) Montrer que : $1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq \exp(\frac{1}{u_{n+1}})$.

(b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

(c) Montrer alors que la série de terme général I_n est divergente.