Feuille d'exercices n°2 : Compléments sur les suites et les séries

1 Méthodes de base

Exercice 1. – Application des règles de base sur les limites – Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = e^{1/n}$
2. $u_n = \ln(n^2) - e^{-n}$
3. $u_n = \dfrac{1}{1-(2/3)^n}$
4. $u_n = \dfrac{1}{1-(3/2)^n}$
5. $u_n = \dfrac{2^n}{1-(3/2)^n}$
6. $u_n = \dfrac{1-(1/2)^n}{(1/2)^n + (2/3)^n}$

Exercice 2. – Sommes finies usuelles – Déterminer chacune des sommes suivantes en fonction de n.

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}k+1\right)$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(k^2+3k+1\right)$

Exercice 3. – Sommes de séries usuelles – Déterminer la somme de chacune des séries suivantes (on justifiera brièvement leur convergence).

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{2^{k-1}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^{k-1}}{k!}$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3k^2}{2^{k-1}}$

Exercice 4. – Application du théorème des suites monotones bornées – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+6x+1}{9}$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe dans $[0,1]$ (on le notera α).
3. Étudier la fonction f sur $[0,1]$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [0,\alpha]$.
5. Étudier la monotonie de (u_n).
6. Montrer la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 5. – Application de l'IAF – On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \dfrac{u_n^2}{4}$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{4}$.

1. Montrer que pour tout n, $u_n \in [0,1]$.
2. Calculer u_1, u_2. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle monotone ?
3. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que f admet un unique point fixe α dans $[0,1]$ et donner la valeur de α.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.
6. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$ et conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 6. – Déterminer un équivalent à partir des équivalents classiques – Déterminer un éuivalent simple de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n^2+4n-4}{\sqrt{n}+3}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}$
3. $u_n = \dfrac{e^{1/n}-1}{n}$
4. $u_n = n^2 \ \ln(1+1/n)$

Exercice 7. – Déterminer une limite grâce à un équivalent – Déterminer les éventuelles limites des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n}\left(e^{1/n}-1\right)$
3. $u_n = n\left(\sqrt{1+1/n}-1\right)$

Exercice 8. – Étudier la convergence d'une série grâce à un équivalent ou une négligeabilité – Étudier la convergence des séries dont le terme général est le suivant.

1. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$
2. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{-n^3+1}$
3. $u_n = \sqrt{n}\left(e^{1/n}-1\right)$
4. $u_n = \dfrac{\left(\sqrt{1+1/n}-1\right)}{n}$
5. $u_n = \dfrac{n}{e^n}$
6. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^3}$

2 Équivalents et limites de suites

Exercice 9. – Classer les suites dont on donne les termes généraux ci-dessous par ordre de négligeabilité :

1. $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$, $\frac{1}{n\ln n}$,
2. n^2, $\sqrt{n}$, $\frac{e^n}{n}$, $\frac{n^2}{\ln n}$, $n\ln(n)$.

Exercice 10. – Déterminer pour chaque couple de suites suivant (définies sur $\mathbb{N}^*$) laquelle est négligeable devant l'autre.

1. $u_n = \ln(n)+n^2$, $v_n = \ln(n^3)$
2. $u_n = e^{n/4}$, $v_n = n^2$
3. $u_n = e^{-n}+\ln(n)$, $v_n = n$

Exercice 11. – Déterminer des équivalents (les plus simples possibles) des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = n^3+e^n+n\sqrt{n}$,
2. $u_n = \frac{n}{\ln(n)+n^2}$,
3. $u_n = \sqrt{e^{\frac{1}{n}}-1}$,
4. $u_n = \dfrac{1}{n}-\ln(1+1/n)$,

Exercice 12. – –

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul, l'équation $e^x+x=n$ admet une unique solution,que l'on notera u_n.
2. Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\geq 1}$ et déterminer sa limite.
3. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $u_n\leq \ln(n)$.
4. Montrer que pour n assez grand, $u_n \geq \ln(n)-1$.
5. En déduire un équivalent simple de u_n.

3 Études de séries

Exercice 13. – Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n^2+1}{2n^3+1}$,
2. $\sum \frac{\sqrt{n}+1}{-n^2+1}$,
3. $\sum \frac{\ln n}{n^2}$,
4. $\sum \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n}}$,
5. $\sum e^{-n}$,
6. $\sum \frac{n^3}{e^n}$.
7. $\sum \sqrt{k^3+1}-\sqrt{k^3}$.

Exercice 14. – Déterminer la nature des séries suivantes suivant la valeur $a>0$:

1. $\sum \frac{1+n}{n^a+1}$,
2. $\sum \frac{1}{n^a+n+1}$,
3. $\sum \frac{\ln n}{n^a}$.

Exercice 15. – Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est à termes strictement positifs et en déduire la convergence de la suite (u_n) ainsi que sa limite.

2. Montrer que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ diverge à l'aide d'un télescopage.
3. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 16. – **Série harmonique** – Le but de l'exercice est de montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. On déterminera un équivalent de la suite de ses sommes partielles. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$
2. Etudier la fonction $x \mapsto x + \ln(1-x)$. En déduire que (u_n) est décroissante.
3. Soit $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$
   (b) En déduire, comme pour (u_n), que (v_n) est croissante.
   (c) En déduire que $v_1 = 1 - \ln 2$ est un minorant positif de (u_n).
   Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_n$ est équivalente à $\ln n$.
5. Conclure quant à la convergence de la série harmonique ainsi que celle des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha < 1$.

Exercice 17. – **Convergence de la série exponentielle** –

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs. On suppose qu'il existe un réel $l \in]0,1[$ tel qu'à partir d'un certain rang n_0 on ait $u_{n+1} \leq l\ u_n$.
   (a) Montrer qu'alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq l^{n-n_0} u_{n_0}$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \geq 0$, $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$.
   (a) Montrer qu'il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \dfrac{1}{2}$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 18. – Le but de cet exercice est de montrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$.

1. Montrer l'inégalité :
$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}\ .$$
En déduire la limite de la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt\right)_n$.
2. Montrer que pour $n \geq 0$ et $t \in [0,1]$,
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k \ = \ \frac{1}{1+t} + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{1+t}$$
3. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \ = \ \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$
4. Conclure.