

## Feuille d'exercices n° 3 : Couples de V. A. discrètes

### 1 Méthodes de base

**Exercice 1. – Déterminer les lois marginales à partir de la loi du couple** – Déterminer les lois marginales du couple  $(X, Y)$  donnée par le tableau suivant :

| $Y \backslash X$ | 0    | 1    | 2    |
|------------------|------|------|------|
| 1                | 1/10 | 2/10 | 1/10 |
| 2                | 4/10 | 1/10 | 1/10 |

**Exercice 2. – Déterminer une des marginales à partir de la loi du couple** – On lance indéfiniment une pièce donnant pile avec probabilité  $p$  ( $0 < p < 1$ ). On note, pour  $k \geq 1$ ,  $A_k$  l'événement "obtenir Pile au  $k$ -ème lancer". On note  $X_1$  la v.a.r représentant le rang du premier Pile et  $X_2$  la v.a.r représentant le rang du second Pile.

1. Rappeler la loi de  $X_1$ , rappeler son espérance.
2. Déterminer la loi du couple  $(X_1, X_2)$ . On utilisera les événements  $A_k$  pour décrire les événements du type  $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ .
3. En déduire la loi de  $X_2$  puis l'espérance de  $X_2$ .

**Exercice 3. – Déterminer une des marginales à partir d'une loi conditionnelle** – On dispose d'une urne  $U_1$  contenant une boule noire et une boule blanche et d'une urne  $U_2$  contenant une boule noire et deux boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante : on lance une pièce équilibrée ; si le résultat est Pile, on effectue des tirages avec remise dans  $U_1$  jusqu'à ce qu'on obtienne une boule noire ; si le résultat est Face, on effectue des tirages avec remise dans  $U_2$  jusqu'à ce qu'on obtienne une boule noire. On note  $X$  la variable aléatoire valant 1 si on a obtenu Pile et 0 sinon ; et  $Y$  la variable aléatoire représentant le rang auquel on obtient la première boule noire.

1. Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = 1]$  puis sachant  $[X = 0]$ .
2. En déduire la loi de  $Y$ .
3. Déterminer l'espérance de  $Y$ .

**Exercice 4. – Fonction d'un couple de v.a.r, formule de transfert** – On reprend les données de l'exercice 1. On définit la v.a.r  $Z = XY$

1. Déterminer la loi de  $Z$  puis son espérance.
2. Retrouver l'espérance de  $Z$  à l'aide de la formule de transfert.

**Exercice 5. – Covariance, indépendance** – On reprend les données de l'exercice 1.

1. Les v.a.r  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la covariance du couple  $(X, Y)$ . Retrouver le résultat de la question précédente.
3. Déterminer le coefficient de corrélation du couple  $(X, Y)$ .

**Exercice 6. – Formule de transfert** – On reprend les données de l'exercice 3. Déterminer l'espérance de  $XY$  puis la covariance de  $X$  et  $Y$ .

**Exercice 7. – Loi d'une somme** – Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a.r indépendantes suivant des lois uniformes sur  $\{1, \dots, n\}$ . On pose  $S = X + Y$ .

1. Déterminer l'espérance de  $S$ .
2. Déterminer la loi de  $S$ .

**Exercice 8. – Loi d'un maximum** – Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a.r indépendantes suivant des loi uniformes sur  $\{1, \dots, n\}$ . On pose  $U = \max(X, Y)$  et  $V = \min(X, Y)$ .

1. Déterminer la loi de  $U$  puis son espérance.
2. En remarquant que  $U + V = X + Y$ , déduire de la question précédente l'espérance de  $V$ .
3. Déterminer la loi de  $V$  puis retrouver son espérance.

## 2 Couples de variables aléatoires

**Exercice 9.** – Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $1/4$  et  $Y$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ .

1. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$  (on présentera sous forme d'un tableau).
2. On suppose que  $P(X = 0, Y = 0) = 3/10$ . Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$  (on présentera sous forme d'un tableau).

**Exercice 10.** – Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme avec  $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ . On note  $Y = X^2$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. En déduire la loi de  $Y$ .
3. Calculer la covariance  $\text{Cov}(X, Y)$ .
4.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 11.** – On reprend les notation de l'exercice 2. Déterminer la loi de  $X_2 - X_1$  puis montrer que  $X_2 - X_1$  est indépendante de  $X_1$ .

**Exercice 12.** – – Un péage comporte  $m$  guichets numérotés de 1 à  $m$ . Soit  $N$  la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet 1.

1. Déterminer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[N = n]$ .
2. Montrer que  $P(X = k) = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{m}\right)^k \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \left(\lambda \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right)^j$ .  
En déduire la loi de probabilité de  $X$  (on retrouvera une loi usuelle).
3. Donner sans calcul les valeurs de  $E(X)$  et de  $V(X)$ .

**Exercice 13.** – Soient  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  trois variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi géométrique de paramètre  $p$ . On pose  $S = X + Y$ .

1. Déterminer l'espérance et la variance de  $S$ .
2. Déterminer la loi de  $S$ . Retrouver  $E(S)$ .
3. (a) Pour  $k \geq 1$ , calculer  $P(Z \geq k)$ .  
(b) Calculer  $P(S \leq Z)$

**Exercice 14.** – Dans cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul. On dispose d’une pièce dont la probabilité de faire "pile" est  $p \in ]0; 1[$  et de  $(n + 1)$  urnes numérotées de 0 à  $n$ .  
 Pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , l’urne numéro  $k$  contient  $k$  boules vertes et  $(n - k)$  boules rouges.  
 On considère l’expérience  $\mathcal{E}$  suivante : on lance  $n$  fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l’urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu.  
 Par exemple, si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces  $n$  lancers, on pioche dans l’urne  $n^o 4$ .  
 On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenus lors des  $n$  lancers et  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si l’on tire une boule verte et 0 sinon.

1. (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .  
 On précisera en particulier  $X(\Omega)$  et  $P(X = k)$  pour tout  $k$  de  $X(\Omega)$ .  
 Donner l’espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$ .  
 (b) En utilisant la formule de Koenig-Huygens, calculer la valeur de  $E(X^2)$ .
2. (a) Calculer  $P_{(X=0)}(Y = 0)$  et  $P_{(X=n)}(Y = 0)$ .  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?  
 (b) Justifier que, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $P_{(X=k)}(Y = 1) = \frac{k}{n}$ .  
 (c) En déduire, en utilisant le s. c. e.  $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$ , que :  $P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}$ .  
 (d) Donner la loi de  $Y$  et son espérance.
3. (a) Montrer que  $E(XY) = \sum_{k=0}^n kP(X = k \cap Y = 1) = \frac{E(X^2)}{n}$ .  
 (b) En déduire la covariance du couple  $(X, Y)$ .

### 3 Suites de variables aléatoires

**Exercice 15.** – Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que pour tout entier  $i \geq 1$ , la variable aléatoire  $X_i$  est de loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{i}$ .  
 Calculer l’espérance et la variance de la variable  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

**Exercice 16.** – On considère une urne contenant  $m$  boules ( $m \geq 1$ ) numérotées de 1 à  $m$ . On effectue successivement  $n$  tirages ( $n \geq 2$ ) dans l’urne, avec remise. On note  $X_i$  le numéro de la boule tirée au  $i$ -ème tirage et  $S = \max(X_1, \dots, X_n)$ .

1. (a) Justifier que pour tout  $k$  on a  $(S \leq k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k)$ .  
 (b) En déduire la probabilité  $P(S \leq k)$  pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ .  
 (c) Justifier que  $P(S = k) = P(S \leq k) - P(S \leq k - 1)$ . En déduire la loi de  $S$ .
2. En utilisant la même stratégie que dans la première question, déterminer la loi de la variable  $I = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

**Exercice 17.** –

On suppose que l’on dispose d’un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au touché.

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche.

On effectue une succession d’expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l’urne et, après chaque tirage, on remet cette boule dans l’urne avec une autre boule de la même couleur que la boule tirée. On note  $(\Omega, P)$  l’espace probabilisé associé à cette expérience aléatoire (on ne cherchera pas à le préciser).

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $X_n$  (respectivement  $Y_n$ ) le nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l’urne après la  $n$ -ème répétition de cette expérience.  $n$ -ème tirage.

Pour tout entier  $k \geq 1$ , on note  $R_k$  (respectivement  $B_k$ ) l’événement "tirer une boule rouge (respectivement blanche) au  $k$ -ème tirage".

1. (a) Déterminer  $X_1(\Omega)$ , la loi de  $X_1$ . Calculer  $E(X_1)$  et  $V(X_1)$ .  
 (b) Exprimer les événements  $[X_2 = 1]$ ,  $[X_2 = 2]$  et  $[X_2 = 3]$  en fonction des événements  $B_1, B_2, R_1, R_2$ .  
 (c) Montrer que  $X_2$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$  (c'est à dire  $\{1, 2, 3\}$ ). En déduire  $E(X_2)$  et  $V(X_2)$ .
2. (a) Exprimer l'événement  $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 2]$  en fonction (de certains) des événements  $B_1, B_2, R_1, R_2$ .  
 En déduire  $P(X_1 = 1 ; X_2 = 2)$ .  
 (b) Déterminer sous forme d'un tableau la loi conjointe du couple  $(X_1, X_2)$ .  
 (c) Calculer la covariance de  $X_1$  et  $X_2$ . Les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes ?
3. (a) Pour tout entier  $n \geq 1$ , exprimer l'événement  $[X_n = 1]$  en fonction des événements  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .  
 (b) Montrer que  $P(X_n = 1) = \frac{1}{n+1}$ . Déterminer de même  $P(X_n = n+1)$ .
4. (a) Établir, pour tout entier  $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ , les égalités suivantes :

$$P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} \quad \text{et} \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \frac{n-k}{n+2}.$$

- (b) En déduire, , pour tout entier  $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ , une relation entre  $P(X_n = k-1)$ ,  $P(X_n = k)$  et  $P(X_{n+1} = k)$ .
  - (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout  $n \geq 1$ , la variable aléatoire  $X_n$  suit la loi uniforme discrète sur  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ .
5. Compléter le programme python suivant afin qu'il simule une réalisation de la variable aléatoire  $X_n$ , où l'entier  $n$  est entré au clavier.

```
import numpy.random as rd
n = int(input('entrer une valeur de n'))
r = 1
b = 1
for k in range(1,n+1):
    if rd.random() < r/(r+b) :
        ...
    else :
        ...
print(r)
```

6. (a) Justifier que les variables aléatoires  $X_n$  et  $Y_n$  ont même loi.  
 (b) Pour tout entier  $n \geq 1$ , que vaut  $X_n + Y_n$  ?  
 (c) Quel est le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X_n, Y_n)$  ?