

Corrigé du DM n°1

À rendre le 09/10/2026

Exercice 1

1. _____

```
n = 100
u = 0.5
for i in range(1,n+1): # ou bien range(0,n)
    u = u - u**2

print(u)
```

2. Étude la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

- (a) Soit $x \in]0, 1[$.
 Remarquons que $x - x^2 = x(x - 1)$.
 Or $x \in]0, 1[$ et $(1 - x) \in]0, 1[$.
 Donc $x(1 - x) \in]0, 1[$ et donc $x - x^2 \in]0, 1[$.
- (b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \in]0, 1[$.
- Initialisation : d'après l'énoncé, $u_0 = a \in]0, 1[$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
 - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
 Par hypothèse de récurrence, $u_n \in]0, 1[$.
 D'après le résultat de la question (a), cela implique que $u_n - u_n^2 \in]0, 1[$; c'est à dire $u_{n+1} \in]0, 1[$.
 Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
 - Conclusion : en application du principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
 $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$.
 Conclusion : (u_n) est décroissante.
- (d) La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) ; donc elle converge.
 Comme la fonction $x \mapsto x - x^2$ est continue, d'après le théorème du point fixe, cette limite est solution de l'équation $x = x - x^2$, c'est à dire $x^2 = 0$.
 On en déduit que la limite de (u_n) est 0.
- (e) _____

```
u = 0.5
while u > 10**{-3}:
    u = u - u**2
    n = n+1

print(n)
```

3. Étude de la série de terme général u_n^2 .

(a) On a $u_{k+1} = u_k - u_k^2$; donc $u_k^2 = u_k - u_{k+1}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n u_k - u_{k+1} .$$

On remarque qu'il s'agit d'une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0 - u_1 + u_1 - u_2 + \cdots + u_{n-1} - u_n + u_n - u_{n+1} = u_0 - u_{n+1} .$$

(c) D'après la question précédente, et comme (u_n) a pour limite 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0 .$$

On en conclut que la série de terme général u_n^2 est convergente et que sa somme vaut $u_0 = a$.

4. Étude de la série de terme général u_n .

(a) Pour $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right) = \sum_{k=0}^n \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) .$$

On reconnaît là aussi une somme télescopique, ce qui donne

$$\sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right) = \ln(u_1) - \ln(u_0) + \ln(u_2) - \ln(u_1) + \cdots + \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) .$$

(b) Comme (u_n) a pour limite 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty ;$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right) = -\infty .$$

On en conclut que la série de terme général $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ est divergente et donc également la série de terme général $-\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.

(c) On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n - u_n^2}{u_n} = 1 - u_n$; donc $-\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = -\ln(1 - u_n)$.

(d) D'après la question précédente, et Comme (u_n) a pour limite 0,

$$\ln(1 - u_n) \sim -u_n .$$

Donc, d'après la question précédente,

$$-\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \sim u_n .$$

Remarquons qu'il s'agit de suite à termes positifs car pour tout n , $u_n > 0$ d'une part et d'autre part, $u_{n+1} < u_n$ donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < 0$.

On déduit du théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

En utilisant le résultat de la question (b), on en conclut que la série de terme général u_n est divergente.

Exercice 2 (facultatif)

EML Appli 2023 Ex1

1. (a) • Dérivée de f .

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ car quotient de fonctions dérivables. On a, pour $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot x - e^{-x} \cdot 1}{x^2} = \frac{-(x+1)e^{-x}}{x^2}.$$

Remarquons que, pour tout $x > 0$, $(x+1) > 0$, $e^{-x} > 0$, $x^2 > 0$; donc $f'(x) < 0$.

- Limite en 0.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$.

- Limite en $+\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
$f(x)$		
		$+\infty$
		$\searrow$
		0

- (b) On montre cette propriété par récurrence.

- $u_0 = 1 > 0$, donc cette propriété est vraie pour $n = 0$.

- Supposons la propriété vraie au rang n .

Alors, comme par hypothèse de récurrence $u_n > 0$, on définit correctement u_{n+1} en posant $u_{n+1} = f(u_n)$.

De plus, pour tout $x > 0$ on a $f(x) > 0$. Donc, comme $u_n > 0$, $u_{n+1} > 0$.

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

- On en conclut, par application du principe de récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est correctement défini et $u_n > 0$.

2. (a)

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u <= a :
        u = exp(-u)/u
        n = n+1
    return n
```

(b) Avec cette fonction et les valeurs données :

- on a $u_n > 10^6$ pour la première fois lorsque $n = 6$; et $u_n \geq 10^{-6}$ pour la première fois lorsque $n = 5$;
- cela laisse penser que la suite (u_n) prend des valeurs grandes, mais aussi très petites.

(c)

```
def suite_u(n):
    from numpy import exp
    u = 1 # u a pour valeur u_0
    for i in range(1, n+1):
        u = exp(-u)/u # u a alors pour valeur u_i
    return u
```

3. (a) La fonction g est dérivable (composée et somme de fonctions dérivables) et, pour $x > 0$, $g'(x) = -e^{-x} - 2x = -(e^{-x} + 2x)$. On remarque que, pour $x > 0$, $g'(x) < 0$. Ainsi :

- La fonction g est continue sur $[0; +\infty[$ (composée et somme de fonctions continues).
- La fonction g est strictement décroissante.
- On a $g(0) = 1$; et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

On déduit alors du théorème de la bijection continue que g est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $] -\infty; 1]$.

(b) On remarque tout d'abord que l'on a, pour $x > 0$,

$$f(x) = x \iff \frac{e^{-x}}{x} = x \iff e^{-x} = x^2 \iff g(x) = 0.$$

D'après la question précédente, comme $0 \in] -\infty; 1]$, 0 admet un unique antécédent α par g .

On déduit de ces deux points que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

(c) On a $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$; donc, comme g est décroissante, $1 > \alpha$.

En effet, si on avait $1 \leq \alpha$, on aurait, comme g est décroissante, $g(1) \geq g(\alpha)$, c'est à dire $g(1) \geq 0$.

On a $g(1/e) = \frac{1}{e^{1/e}} - \frac{1}{e^2}$. Or $1/e < 2$, donc $e^{1/e} < e^2$, donc $g(1/e) > 0$.

On en déduit, comme g est décroissante, que $1/e < \alpha$ (même justification).

4. (a) On a $u_0 = 1$, $u_1 = 1/e$ puis $u_2 = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e \cdot e^{-1/e} = e^{1-1/e}$.

Comme $1 - 1/e > 0$, $u_2 > 1$ et donc $u_2 > u_0$.

(b) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$. On souhaite montrer que la suite (v_n) est croissante. Montrons cette propriété par récurrence.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété : $v_{n+1} \geq v_n$.

- Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est vraie d'après le a).
- Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

On a alors $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(v_n)$.

De même $v_{n+2} = (f \circ f)(v_{n+1})$.

Par hypothèse de récurrence, $v_{n+1} \geq v_n$.

Par ailleurs, comme f est décroissante, $f \circ f$ est croissante.

Ces deux derniers points impliquent que

$$(f \circ f)(v_{n+1}) \geq (f \circ f)(v_n) ;$$

c'est à dire, d'après le calcul fait précédemment, que $v_{n+2} \geq v_{n+1}$.

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• Conclusion.

En application du principe de récurrence, on en conclut que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n .

Ainsi la suite (u_{2n}) est croissante.

(c) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n+1}$.

Montrons que (w_n) est décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a montré à la question précédente que $u_{2n} \leq u_{2n+2}$. Comme f est décroissante, on en déduit que $f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$, c'est à dire $u_{2n+1} \leq u_{2n+3}$, c'est à dire $w_n \geq w_{n+1}$.

Ainsi (w_n) est décroissante.

De plus, comme (u_n) est minorée par 0, (w_n) est également minorée par 0.

On en conclut que la suite (w_n) , c'est à dire (u_{2n+1}) est convergente.

5. (a) Soit $x \in]0; +\infty[$; on a :

$$h(x) = f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \frac{e^{-e^{-x}/x}}{e^{-x}/x} = xe^{x-e^{-x}/x}.$$

(b) Sur $]0; +\infty[$, la fonction h est continue car composée et produit de fonctions continues.

Étudions la continuité en 0.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x}/x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - e^{-x}/x = -\infty$.

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(x - e^{-x}/x) = 0$, et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$ et la fonction h est donc continue en 0.

Conclusion : h est continue sur $[0; +\infty[$.

(c) Remarquons tout d'abord que 0 et α sont solutions de cette équation.

En effet, par définition $h(0) = 0$ et $h(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$.

De plus on a, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff xe^{x-e^{-x}/x} = x \\ &\iff e^{x-e^{-x}/x} = 1 \\ &\iff x - e^{-x}/x = 0 \\ &\iff f(x) = x \\ &\iff x = \alpha \end{aligned}$$

Ainsi 0 et α les deux seules solutions de l'équation $h(x) = x$ dans $[0; +\infty[$.

(d) On reprend les notations du 4.c).

La suite (w_n) est définie par la relation $w_{n+1} = h(w_n)$ et la fonction h est continue. On a montré de plus qu'elle converge. On en déduit que sa limite est solution de l'équation

$h(x) = x$ (dans $[0, +\infty[$ car pour tout n on a $w_n > 0$).

De plus la suite (w_n) décroissante et $w_0 = 1/e < \alpha$. On en déduit que sa limite ne peut être que 0.

Conclusion :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0 .$$

6. On a $u_{2n} = f(u_{2n-1}) = f(u_{2(n-1)+1})$.

Or, d'après la question précédente, $u_{2(n-1)+1} \rightarrow 0$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, on en déduit, par composition des limites, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty .$$

En particulier la suite (u_{2n}) n'est pas majorée.

Exercice 3 (facultatif)

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-n}{x} = -\infty$; donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-n/x} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$.

Conclusion : f_n est continue en 0.

(b) Pour $x > 0$, $\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-n/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Conclusion : f_n est dérivable (à droite) en 0 et $f'_n(0) = 0$.

2. (a) La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que composée et produit de fonctions dérivables.

Pour tout réel $x > 0$,

$$f'_n(x) = e^{-n/x} + x \left(\frac{n}{x^2} \right) e^{-n/x} = \left(1 + \frac{n}{x} \right) e^{-n/x} .$$

Le signe de $f'_n(x)$ est le même que celui de $\left(1 + \frac{n}{x} \right)$; donc $f'_n(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

(b) En $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n}{x} = 0$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-n/x} = 1$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Tableau de variation de f_n :

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	
$f_n(x)$	0	$+\infty$

3. (a) Lorsque u est au voisinage de 0, $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

(b) Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\frac{-n}{x} \rightarrow 0$. On peut donc utiliser le DL2 précédent lorsque x est au voisinage de $+\infty$:

$$e^{-n/x} = 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) ;$$

ce qui donne :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

(c) On a, d'après la question précédente,

$$f_n(x) - (x - n) = \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) - (x - n) = 0 .$$

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, (C_n) admet pour une asymptote oblique la droite (D_n) d'équation $y = x - n$.

Précisons la position relative de (D_n) et (C_n) aux voisinages de $+\infty$.

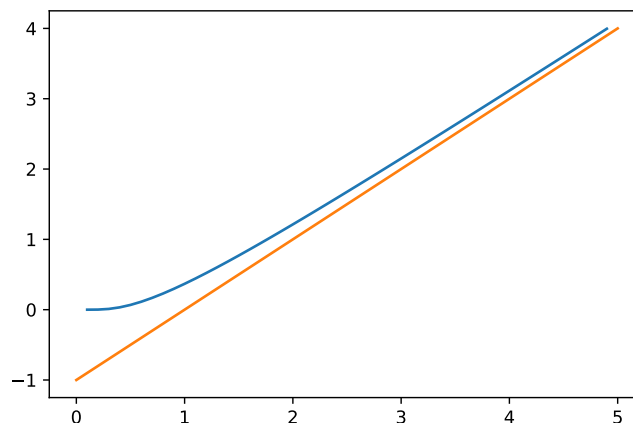
Pour cela on fait la remarque suivante :

$$f_n(x) - (x - n) = \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \left(\frac{n^2}{2} + o(1) \right) .$$

Or, pour $x > 0$, $1/x > 0$ et $\frac{n^2}{2} + o(1) = \frac{n^2}{2} > 0$. Donc, pour x assez grand, $\frac{n^2}{2} + o(1) \geq 0$.

On en conclut que pour x assez grand, $f_n(x) - (x - n) \geq 0$ et donc que C_n est au-dessus de D_n .

(d)



4. (a) La fonction f_n a les propriétés suivantes :

- Elle est continue (composée et produit de fonctions continues sur $]0; +\infty[$ et continuité en 0 démontrée au début de l'exercice ;
- elle est strictement croissante ;
- $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

On en déduit, d'après le théorème de la bijection continue, que f_n établit une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

Comme 1 est dans l'espace d'arrivée, on en déduit que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $f_n(1) = e^{-n} < 1$. Cela entraîne $u_n > 1$ car si on avait $u_n \leq 1$ on aurait, comme f est croissante, $f_n(u_n) \leq f_n(1)$, c'est à dire $1 \leq f_n(1)$.

Par ailleurs, on a $u_n e^{-n/u_n} = 1$, donc $\ln(u_n) + \ln(e^{-n/u_n}) = 0$, donc $\ln(u_n) - \frac{n}{u_n} = 0$

donc $\ln(u_n) = \frac{n}{u_n}$ donc $u_n \ln(u_n) = n$.

Ainsi u_n est solution de l'équation $x \ln(x) = n$.

(c) La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$ est on a $g'(x) = \ln x + 1 > 0$.

Ainsi (on applique à nouveau le théorème de la bijection continue), g établit une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x) = +\infty$.

Or $u_n = g^{-1}(n)$.

On en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $u_n \ln(u_n) = n$; et donc, en prenant le logarithme, $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$.

Remarquons que, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = +\infty$; et donc, par croissances comparées,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = 0 .$$

Reprenons alors la relation $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$.

Elle donne, en divisant par $\ln u_n$:

$$1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln u_n} = \frac{\ln(n)}{\ln u_n} ;$$

et donc, d'après la remarque qui précède,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\ln u_n} = 1 .$$

On en conclut que $\ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

(e) Remarque : attention à ne pas tomber dans le piège :

ce n'est pas parce que $\ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ que $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\ln n} = n$.

On repart de la relation $u_n \ln(u_n) = n$.

On a donc $u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$.

5. (a) On a $u_n = g^{-1}(n)$, et la fonction g^{-1} est strictement croissante, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

(b) On a $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} \exp(-\frac{n}{u_{n+1}}) = u_{n+1} \exp(-\frac{n+1}{u_{n+1}}) \exp(\frac{1}{u_{n+1}})$.

Or $u_{n+1} \exp(-\frac{n+1}{u_{n+1}}) = f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$.

Donc $f_n(u_{n+1}) = \exp(\frac{1}{u_{n+1}})$.

6. On pose $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt$.

- (a) La fonction f_n est croissante, donc pour $t \in [u_n, u_{n+1}]$,

$$f(u_n) \leq f_n(t) \leq f(u_{n+1}) ;$$

et donc, en utilisant la définition de u_n et le résultat de la question précédente,

$$1 \leq f_n(t) \leq \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right) .$$

On en déduit que

$$u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq (u_{n+1} - u_n) \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right) ;$$

d'où le résultat.

- (b) Comme $u_{n+1} \longrightarrow +\infty$, on déduit de la question précédente, par encadrement, que

$$\frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \longrightarrow 1 ;$$

et donc

$$I_n \sim u_{n+1} - u_n$$

- (c) Notons

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_{k+1} - u_k .$$

Par télescopage,

$$S_n = u_{n+1} - u_1 .$$

On en déduit que $S_n \longrightarrow +\infty$ et donc que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ diverge. On déduit alors de la question précédente, par comparaison de séries à termes positifs, que la série de terme général I_n diverge.

Montrer alors que la série de terme général I_n est divergente.