DS n°3

le 06/11/2026
Durée : 3h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Vous ferez ou bien les exercices 1,2 et 3, ou bien les exercices 2,3 et 4.

Exercice 1

Coralie est étudiante en classe préparatoire. Chaque matin, elle se lève en retard avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle se lève en retard elle est obligée de prendre le bus pour se rendre au lycée. Par contre, lorsque elle est à l'heure, elle choisit avec deux chances sur cinq d'aller à pied et avec trois chances sur cinq de prendre le bus.

Partie I

On considère un matin donné et on définit les événements R : « Coralie se lève en retard » et B : « Coralie prend le bus ».

1. Montrer que $P(B) = \frac{11}{15}$ (on justifiera soigneusement).
2. On suupose qu'un matin donné Coralie prend le bus. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?
3. On étudie maintenant les trajets pendant les 180 jours de cours d'une année scolaire. On suppose que chaque jour les choix de Coralie sont indépendants des choix des jours précédents.

   On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de fois ou Coralie prend le bus.

   (a) Reconnaître la loi de X. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque entier k, une expression de $P(X = k)$ en fonction de k.

   (b) Donner $E(X)$ et $V(X)$.

   (c) En moyenne combien de matins dans l'année Coralie peut-elle espérer aller au lycée à pied ?

Partie II

La société de bus annonce pour la semaine prochaine un préavis de grève reconductible. On suppose que durant la grève aucun bus ne circule.

Cette fois-ci, bien entendu, Coralie est obligée de se rendre au lycée à pied. Mais si elle se lève en retard, elle arrivera en retard au lycée. Chaque jour de grève, elle arrive donc en retard au lycée avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On admet que la durée de la grève en nombre de jours suit une variable aléatoire N dont la loi est donnée dans le tableau suivant :

k	1	2	3
$P(N = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de jours où Coralie est en retard au lycée pendant la période de grève.

1. Calculer $E(N)$ et la variance $V(N)$.
2. Décrire $Y(\Omega)$, ensemble des valeurs prises par Y.
3. (a) Déterminer $P_{(N=1)}(Y = 0)$, $P_{(N=1)}(Y = 1)$, $P_{(N=1)}(Y = 2)$, $P_{(N=1)}(Y = 3)$.

   (b) Déterminer $P_{(N=2)}(Y = 0)$, $P_{(N=2)}(Y = 1)$, $P_{(N=2)}(Y = 2)$, $P_{(N=2)}(Y = 3)$.

   (c) Déterminer la loi de Y

   (d) Calculer $E(Y)$.

Exercice 2

Partie I : tirages dans une urne

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et vérifier que la variance de X, notée $V(X)$ est égale à 75.
2. On procède cette fois-ci dans $\mathcal{U}$ à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   On précisera $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de $E(Y)$ et vérifier que $V(Y) = 12$.
3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules. On appelle Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
   (a) Quelle est la loi de Z ?
   On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
   (b) Donner les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne $\mathcal{U}$ contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.
On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut $T(\Omega)$?
2. Donner la loi de T. On vérifiera que $P(T = 1) = \frac{7}{16}$.
3. Calculer $E(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'évènement $[T = 1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?
5. On suppose importé `numpy.random` par la commande `import numpy.random as rd` .
   On rappelle qu'alors l'instruction `rd.randint( n1,n2)` renvoie un entier au hasard et uniformément compris entre `n1` (inclus) et `n2` (exclu).
   Compléter, sur votre copie, le programme suivant afin qu'il affiche une simulation de la variable aléatoire T.

```
T = ......... # initialisation
if rd.randint(1,3) == 1 :
       for k in range(1,3):
              if rd.randint(1,5)<2 then
                     T = T+1
else :
        ... (plusieurs lignes)

print("Une simulation de T donne :", T)
```

Exercice 3 :

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,1[$; on note $q = 1-p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur une même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant chacune une loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X,Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On rappelle que, pour tout entier naturel k, $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.
   (a) Calculer, pour tout entier naturel k, $P(Z > k)$.
   (b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1,
   $$P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k)\ .$$
   (c) En déduire que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
   pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)$ est un entier pair, on pose $T(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega)$;
   pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)$ est un entier impair, on pose $T(\omega) = \frac{1}{2}(X(\omega)+1)$.
   (a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.
   (b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$; en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   (c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains des événements $[X = i]$; en déduire que T suit la même loi que Z.
   (d) Déterminer l'espérance de T.
3. Simulation informatique.
   (a) La commande python `n%2` renvoie le reste de la division euclidienne de n par 2. Si ce reste vaut 0, n est pair, sinon, n est impair.
   Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule tout d'abord la variable aléatoire X de loi géométrique puis ensuite simule la variable aléatoire T et retourne la valeur simulée.

```
import numpy.random  as rd
def simulT(p):
    n=1
    while rd.random() ...
        n = ...

    if ...    :
        T = ...
    else :
        T = ...
    return T
```

   (b) .
   On effectue le programme suivant :

```
p = 0.4
N = 10000
S = 0
for i in range(1,N+1):
    S = S + simulT(p)

print(S/N)
```

   La valeur affichée est `1.563`.
   Expliquer la signification de cette valeur.
   Est-elle cohérente avec les calculs effectués précédemment ?

Exercice 4

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0,1,2\}$, on note A_i l'événement : «on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : «on obtient "pile" au lancer numéro k » ; et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X=1)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire la valeur de $P(X=0)$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .
3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.
4. Justifier que Y suit la même loi que X.
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1] \cap [Y=j]) = P([Y=j])$.
   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P([X=i])$.
6. Loi de $X+Y$.
   (a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   (b) Montrer que $P(X+Y=1) = \frac{2}{3}$.
   (c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$(X+Y=n) = ([X=1] \cap [Y=n-1]) \cup ([Y=1] \cap [X=n-1])$$
   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
   $$P(X+Y=n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} .$$
7. Informatique. On suppose le module `numpy.random` importé par la commande `import numpy.random as rd`. On rappelle qu'alors la commande `rd.randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire compris entre a (inclus) et b (exclu), selon la loi uniforme. On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0 .
   (a) Compléter le script `Python` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = rd.randint(..., ... )
x = 1
if piece == 0 :
    lancer = rd.randint(... , ...)
    while lancer==0 :
        lancer =  ...
        x =  ..
elif piece == 1 :
        x = ...

print(x)
```

   (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

.