Corrigé du DS n°3

le 06/11/2026
Durée : 3h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Vous ferez ou bien les exercices 1,2 et 3, ou bien les exercices 2,3 et 4.

Exercice 1

Partie I

1. R et $\bar{R}$ constituent un système complet d'événements. On a alors :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(R \cap B) + P(\bar{R} \cap B) \\ &= P(R)P_R(B) + P(\bar{R})P_{\bar{R}}(B) \\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

2. On cherche la probabilité $P_B(\bar{R})$:

$$P_B(\bar{R}) = \frac{P(\bar{R} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{R})P_{\bar{R}}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{11}{15}} = \frac{6}{11}.$$

3. (a) X désigne le **nombre de succès** dans la **répétition** de $n = 180$ **épreuves de Bernoulli identiques** et **indépendantes**, dont le succès " Coralie prend le bus" a pour probabilité $p = \frac{11}{15}$. Donc X suit la loi **binomiale** de paramètres 180 et $\frac{11}{15}$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(180; \frac{11}{15}\right)$.
On a alors $X(\Omega) = \{0, \dots 180\}$, et :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \{0, \dots 180\},\ P(X = k) = \binom{180}{k} \left(\frac{11}{15}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{180-k}.}$$

(b) On a immédiatement :

$$\boxed{E(X) = np = 180 \times \frac{11}{15} = 132} \text{ et } \boxed{V(X) = np(1-p) = 132 \times \frac{4}{15} = \frac{176}{5}}$$

(c) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de jours dans l'année où Coralie va au lycée à pied. On a : $Y = 180 - X$ puisque il y a X jours où Coralie prend le bus sur le total de 180 jours.
On cherche l'espérance de Y :

$$E(Y) = E(180 - X) = 180 - E(X) = 180 - 132 = 48.$$

$$\boxed{\text{En moyenne, Coralie va à pied au lycée 48 jours dans l'année.}}$$

Partie II

1.
$$E(N) = \sum_{k\in N(\Omega)} kP(N=k) = 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{8} + 3\times\frac{3}{8} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{9}{8} = \frac{15}{8}.$$

Pour calculer sa variance, calculons tout d'abord $E(N^2)$:

$$E(N^2) = \sum_{k\in N(\Omega)} k^2P(N=k) = 1^2\times\frac{1}{2} + 2^2\times\frac{1}{8} + 3^2\times\frac{3}{8} = \frac{35}{8}\ .$$

Puis
$$V(N) = E(N^2) - (E(N))^2 = \frac{35}{8} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{280}{64} - \frac{225}{64} = \frac{65}{64}$$

2. On a $\boxed{Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}}$ puisque $N(\Omega) = \{1,2,3\}$.

3. (a) $P_{[N=1]}(Y=0)$ est la probabilité que Coralie ne soit pas en retard le premier jour de la grève. Donc $\boxed{P_{[N=1]}(Y=0) = \frac{2}{3}.}$

$P_{[N=1]}(Y=1)$ est la probabilité que Coralie soit en retard le premier jour de la grève. Donc $\boxed{P_{[N=1]}(Y=1) = \frac{1}{3}.}$

Si $k>1$, on a $P_{[N=1]}(Y=k) = 0$.

(b) On a bien sûr $P_{[N=2]}(Y=3) = 0$.
Sachant l'événement $N=2$ réalisé, Y compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres $n=2$ et $p=1/3$. On a donc :

$$P_{[N=2]}(Y=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad ; \quad P_{[N=2]}(Y=1) = 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \quad ; \quad P_{[N=2]}(Y=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

(c) On a déjà vu que $Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.
Par le même raisonnement que précédemment, on obtient

$$P_{[N=3]}(Y=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}\ ;$$

$$P_{[N=3]}(Y=1) = 3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}\ ;$$

$$P_{[N=3]}(Y=2) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{27}\ ;$$

$$P_{[N=3]}(Y=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}\ .$$

Les événements $[N=1]$, $[N=2]$ et $[N=3]$ forment un système complets d'événements. En appliquant la formule des probabilités totales on obtient :

$$P(Y=0) = P(N=1)P_{[N=1]}(Y=0) + P(N=2)P_{[N=2]}(Y=0) + P(N=3)P_{[N=3]}(Y=0)\ ;$$

et en utilisant les résultats précédents :

$$P(Y=0) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{8}\frac{4}{9} + \frac{3}{8}\frac{8}{27} = \frac{1}{2}\ .$$

De même
$$P(Y=1) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\frac{4}{9} + \frac{3}{8}\frac{12}{27} = \frac{7}{18}\ ;$$
$$P(Y=2) = \frac{1}{2}.0 + \frac{1}{8}\frac{1}{9} + \frac{3}{8}\frac{6}{27} = \frac{7}{72}\ ;$$
$$P(Y=3) = \frac{1}{2}.0 + \frac{1}{8}.0 + \frac{3}{8}\frac{1}{27} = \frac{1}{72}\ ;$$

(d)
$$E(Y) = 0.\frac{1}{2} + 1.\frac{28}{72} + 2.\frac{7}{72} + 3.\frac{1}{72} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8}$$

Exercice 2

Partie I : tirages dans une urne

1. (a) X représente le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli (400 répétitions, probabilité de succès égale à 1/4), donc X suit une loi binomiale de paramètres 400 et $\frac{1}{4}$.
On a alors $X(\Omega) = [[0; 400]]$ (c'est à dire $\{0, 1, ..., 400\}$) et, pour tout $k \in X(\Omega)$,
$$P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}$$

   (b) $E(X) = 400 \times \frac{1}{4} = 100$ et $V(X) = 400 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 75$.

2. (a) Y représente le rang du premier succès dans une répétition d'épreuve de Bernoulli indépendantes (probabilité de succès égale à 1/4) donc Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$.
On a alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in Y(\Omega)$, $P(Y = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4}$

   (b) $E(Y) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ et $V(Y) = \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{3}{4} \times 4^2 = 12$.

3. (a) La boule blanche a la même probabilité de sortir à chaque numéro ; Z suit donc une loi uniforme sur $[[1; 4]]$.
$Z(\Omega) = [[1; 4]]$ et $P(Z = k) = \frac{1}{4}$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.

   (b) $E(Z) = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$; et $V(Z) = \frac{(4+1)(4-1)}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$.
Si on ne se souvient plus de la formule de la variance :
$E(Z^2) = \frac{1}{4}(1 + 4 + 9 + 16) = \frac{15}{2}$ puis $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

1. $T(\Omega) = \{0; 1; 2\}$
2. On note U l'événement : " le tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}$" et V l'événement : " le tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{V}$".
Les événements U et V forment un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales :
$$P(T = 0) = P(U)P_U(T = 0) + P(V)P_V(T = 0) \ .$$
Pour calculer $P_U(T = 0)$, on se place dans la situation où l'urne $\mathcal{U}$ a été choisie. En notant N_1 (N_2) l'événement " la première (deuxième) boule tirée est blanche", ces deux événements sont indépendants (pour la probabilité P_U) ; on a donc :
$$P_U(T = 0) = P_U(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) = P_U(\overline{N_1}).P_U(\overline{N_2}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \ .$$
Remarque : on pouvait visualiser cela sur un arbre bien sûr.
De même : $P_V(T = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; on obtient donc :
$$P(T = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{13}{32} \ .$$
Par la même méthode :
$$P(T = 1) = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}.\frac{3}{4} + \frac{3}{4}.\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16} \ ;$$
et
$$P(T = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32} \ .$$

Résumons la loi de Z :

t_i	0	1	2
$P(T=t_i)$	$\frac{13}{32}$	$\frac{14}{32}$	$\frac{5}{32}$

3. $E(T) = 0 \times \frac{13}{32} + 1 \times \frac{14}{32} + 2 \times \frac{5}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$

   Si T suivait une loi binomiale de paramètres n et p, on aurait $n = 2$ et $P(T=2) = p^2$, c'est-à-dire $p = \sqrt{\frac{5}{32}}$.

   On aurait alors $E(T) = np = 2\sqrt{\frac{5}{32}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, qui n'est pas égal à $\frac{3}{4}$.

   Donc T ne suit pas une loi binomiale.

4. $P_{[T=1]}(U) = \frac{P([T=1] \cap U)}{P[T=1]} = \frac{\frac{6}{32}}{\frac{14}{32}} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$,

   tandis que $P_{[T=1]}(V) = \frac{P([T=1] \cap V)}{P[T=1]} = \frac{\frac{8}{32}}{\frac{14}{32}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$,

   donc sachant que $[T=1]$, il est plus probable d'avoir obtenu face, c'est-à-dire d'avoir pioché dans l'urne $\mathcal{V}$.

5.
```
T = 0  # initialisation
if rd.randint(1,3) == 1 : # proba : 1/2
        for k in range(1,3):
                if rd.randint(1,5)<2 : #proba : 1/4
                        T = T+1
else :
        for k in range(1,3):
                if rd.randint(1,5) < 3 : #proba : 1/2
                        T = T+1

print("Une simulation de T donne :",  T)
```

Exercice 3 :

Adapté de EDHEC E 2009

1. (a) Comme les valeurs possibles de X et de Y sont $\mathbb{N}^*$, $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

   Soit $k \in \mathbb{N}$,

   $$P(Z > k) = P([X > k] \cap [Y > k]) \ ;$$

   et comme X et Y sont indépendantes,

   $$P(Z > k) = P([X > k]) \ P([Y > k]) \ .$$

   Calculons la valeur commune de $P([X > k])$ et $P([X > k])$. Pour cela, on calcule la probabilité de l'événement contraire :

   $$P([X \leq k]) = \sum_{i=1}^{k} p \, q^{k-1} = p \, \frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k \ .$$

   Remarque : on aurait pu aussi utiliser le fait que X représente le rang du premier succès lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p. L'événement $[X > k]$ est l'événement "échecs lors des k premières épreuves", et a donc pour probabilité q^k.

   On en conclut que, pour tout entier naturel k, $P(Z > k) = q^{2k}$.

   (b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $[Z > k-1] = [Z = k] \cup [Z > k]$ (union disjointe), donc

   $$P(Z > k-1) = P(Z = k) + P(Z > k) \ ;$$

   et donc

   $$P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k) \ .$$

(c) La variable aléatoire Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et en utilisant les deux questions précédentes on obtient, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Z=k) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = \left(q^2\right)^{k-1}\left(1-q^2\right) = \left(1-\left(1-q^2\right)\right)^{k-1}\left(1-q^2\right) \ .$$

On en conclut que Z suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2$.

2. (a) Si la valeur de $X(\omega)$ est paire (non nulle car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$) alors la valeur de $X(\omega)/2$ est un entier non nul.
Si la valeur de $X(\omega)$ est impaire alors la valeur de $X(\omega)+1$ est paire non nulle et $[X(\omega)+1]/2$ est un entier non nul.
Conclusion : $\boxed{T \text{ prend des valeurs entières non nulles.}}$

(b) Soit k un entier naturel non nul.
Alors $2k \in X(\Omega)$ et est pair. Donc $2k/2 = k \in T(\Omega)$.
Donc $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
Conclusion : $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

(c) $(T=k)$ peut être réalisé avec X pair, auquel cas $X = 2k$, ou avec X impair, auquel cas $X = 2k-1$ (pour que $\dfrac{1+X}{2}$ soit égal à T).

Conclusion : $\boxed{(T=k) = (X=2k) \cup (X=2k-1)}$ et ces 'evénements sont incompatibles. (Remarquons que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a bien $2k \in \mathbb{N}^*$ et $2k-1 \in \mathbb{N}^*$).
On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T=k) &= P(X=2k) + P(X=2k-1) \\ &= q^{2k-1}p + q^{2k-2}p \\ &= q^{2k-2}p(1+q) \\ &= q^{2k-2}(1-q)(1+q) \\ &= q^{2(k-1)}\left(1-q^2\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{T \text{ suit également une loi } \mathcal{G}\left(1-q^2\right), \text{ comme } Z}$.

(d) Comme T suit une loi $\mathcal{G}\left(1-q^2\right)$,

$$E(T) = \frac{1}{1-q^2} \ .$$

3. Simulation informatique.

(a)

```
import numpy.random() as rd
def simulT(p):
    n=1
    while rd.random()>p:
        n = n+1

    if n%2 == 0    :
        T = n//2
    else :
        T = (n+1)/2
    return T
```

(b) Ce programme simule 10000 fois la variable aléatoire T (avec $p = 0,4$) et affiche la valeur de la moyenne empirique obtenue. Cette valeur fournit une approximation de l'espérance de T.
Pour $p = 0,4$, on a obtenu :

$$E(T) = \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{1-(6/10)^2} = \frac{100}{64} \ .$$

En effectuant la division, on trouve $\dfrac{100}{64} \simeq 1,56$, ce qui est cohérent avec la moyenne empirique obtenue.

Exercice 4

ADAPTÉ DE EDHEC E 2018

1. (a) $(X=1)$ est réalisé lorsqu'on obtient "pile" dès le premier lancer , avec la pièce 0, ou la 1, ou la 2. La formule des probabilités totales ,écrite avec le système complet d'événements (A_0, A_1, A_2) donne donc : $P(X=1) = P(P_1) = P_{A_0}(P_1).P(A_0) + P_{A_1}(P_1).P(A_1) + P_{A_2}(P_1).P(A_2)$

   Et comme $P_{A_0}(P_1) = \frac{1}{2}$, $P_{A_1}(P_1) = 0$, $P_{A_2}(P_1) = 1$ et $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$,
   on obtient : $P(X=1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} + 1.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

   (b) La même formule des probabilités totales donne :

   $P(X=n) = P_{A_0}(X=n).P(A_0) + P_{A_1}(X=n).P(A_1) + P_{A_2}(X=n).P(A_2)$

   Pour $n \geqslant 2$:

   - $P_{A_0}(X=n) = P_{A_0}(F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, car c'est la probabilité d'avoir $n-1$ "face" puis un "pile" avec la pièce 0, les lancers étant indépendants une fois la pièce choisie.
   - $P_{A_1}(X=n) = 0$ car la pièce 1 ne donne jamais "pile" .
   - $P_{A_2}(X=n) = 0$ car la pièce 2 donne "pile" dès le premier coup.

   On a alors pour $n \geqslant 2$:
   $$P(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   (c) Calculons d'abord :
   $$P(X \neq 0) = P(X=1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   On a ici une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, convergente mais qui commence à $n=2$.
   Donc $P(X \neq 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.
   Par conséquent :
   $$P(X=0) = 1 - P(X \neq 0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. X admet une espérance $E(X)$ si, et seulement si , la série $\sum n.P(X=n)$ est (absolument) convergente.
   Or $\sum_{n=0}^{\infty} n.P(X=n) = 0 + 1.P(X=1) + \sum_{n=2}^{\infty} n.P(X=n) = 0 + 1.\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n.\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
   C'est donc une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente.
   Par suite $E(X)$ existe et vaut :

   $$E(X) = 0 + 1.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\sum_{n=2}^{\infty} n.\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n.\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\right).$$

   $$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1/2}{(1-1/2)^2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

   Soit $\boxed{E(X)=1}$

3. D'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ possède une espérance ssi , la série qui définit
   $E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)$ est (absolument) convergente.
   Or $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1).P(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$
   On a affaire à une série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente et

$$E(X(X-1)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{(1-1/2)^3} = \frac{4}{3}.$$

On a donc $\frac{4}{3} = E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$

Et puisque $E(X)^2 = 1 = E(X)$, on a aussi $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X) = \frac{4}{3}$.

Soit $\boxed{V(X) = \frac{4}{3}}$

4. Par symétrie de "pile" et "face" dans la pièce 0 et par symétrie des deux pièces 1 et 2 , on pourrait déterminer la loi de Y pour montrer que c'est la même que celle de X.

5. (a) Pour tout entier j supérieur ou égal à 2 :
Si $[Y = j]$ est réalisé , "face" n'arrive qu'au j-ième ($j \geqslant 2$) lancer ,alors on a eu "pile" au premier lancer et donc $[X = 1]$ est réalisé .
Donc $[Y = j] \subset [X = 1]$ et $[X = 1] \cap [Y = j] = [Y = j]$.

Par suite : $\boxed{P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j]).}$

(b) Si $i \geqslant 2$, on a de la même façon $[X = i] \cap [Y = 1] = [X = i]$ (car si "pile" arrive au i-ième coup , le premier lancer est "face"), et donc $\boxed{P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i]).}$

6. Loi de $X + Y$.

(a) X et Y étant des variables aléatoires entières positives ,$X + Y$ est aussi à valeurs entières positives

- la valeur 0 est impossible pour $X + Y$, car on a $X + Y = 0$ ssi ($X = 0$ et $Y = 0$) , c'est impossible car cela signifie qu'on n'a que des "face" et que des "pile".

- de même, 2 est une valeur impossible pour $X + Y$ car
$[X + Y = 2] = ([X = 0] \cap [Y = 2]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 0])$.

Or , on ne peut avoir ni $([X = 0] \cap [Y = 2])$ (que des "face" et le premier "face" au 2-ième coup), ni $([X = 1] \cap [Y = 1])$ ("pile" et "face" au premier coup), ni $([X = 2] \cap [Y = 0])$ (le premier "pile" au 2-ième coup et que des "pile") . Donc $[X + Y = 2]$ est l'ensemble vide .

(b) On a : $P(X + Y = 1) = P([X = 0] \cap [Y = 1]) + P([X = 1] \cap [Y = 0])$.

Or $([X = 0] \cap [Y = 1]) = [X = 0]$ (puisque "$X = 0$" implique "$Y = 1$")
et de même , $([X = 1] \cap [Y = 0]) = [Y = 0]$ ("que des pile" implique "pile au premier coup").

$$\text{Donc :} \quad P(X + Y = 1) = P([X = 0]) + P([Y = 0]) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(c) (P_1, F_1) est un système complet d'événements donc :

$$\begin{aligned}(X + Y = n) &= ((P_1 \cap [X + Y = n]) \cup (F_1 \cap [X + Y = n]) \\ &= ([X = 1] \cap [Y = n - X = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - Y = n - 1])\end{aligned}$$

On a donc bien , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

(d) Par incompatibilité des événements on a, pour $n \geqslant 3$:
$P(X + Y = n) = P([X = 1] \cap [Y = n - 1]) + P([Y = 1] \cap [X = n - 1])$.

Et d'après 5a) et 5b) : $P(X + Y = n) = P([Y = n - 1]) + P([X = n - 1]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Et ,en conclusion : $\boxed{P(X + Y = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

7.
```
import numpy.random as rd

piece = rd.randint(0,3)

if piece==0 :
    x=1
    lancer = rd.randint(0,2)
    while lancer==0 :
        lancer = rd.randint(0,2)
        x = x + 1
elif piece == 1 :
    x = 0
elif piece == 2 :
    x = 1
print(x)
```