Corrigé du DM n°2

À rendre le 04/11/2026

Exercice 1

1. (a) Notons U_1 l'événement «le premier tirage a lieu dans $\mathcal{U}_1$»et U_2 l'événement «le premier tirage a lieu dans $\mathcal{U}_2$». Ces événement forment un système complet d'événements ; ona donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X=1) = P(U_1)P_{U_1}(X=1) + P(U_2)P_{U_2}(X=1) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{5} = \frac{2}{5}\ .$$

Comme la variable aléatoire X_1 prend les valeurs 0 et 1, on en déduit qu'elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{5}$.

(b) On déduit de la question précédente que $E(X_1) = \dfrac{2}{5}$ et $V(X_1) = \dfrac{2}{5}\,\dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{25}$.

2. (a) On remarque tout d'abord que

$$[X_2=0]\cap[Z=0] = [X_2=0]\cap[X_1=0]\ .$$

On a donc

$$P\left([X_2=0]\cap[Z=0]\right) = P\left([X_1=0]\cap[X_2=0]\right) = P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_2=0)\ .$$

Or, si l'événement $[X_1=0]$ s'est produit, le second tirage a lieu dans l'urne $\mathcal{U}_2$; donc $P_{[X_1=0]}(X_2=0) = \dfrac{4}{5}$. On obtient ainsi :

$$P\left([X_2=0]\cap[Z=0]\right) = \frac{3}{5}\,\frac{4}{5} = \frac{12}{25}\ .$$

(b) Remarquons que Z peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.
En procédant comme à la question précédente, on obtient :
$P\left([X_2=0]\cap[Z=1]\right) = P\left([X_2=0]\cap[X_1=1]\right) = P(X_1=1)P_{[X_1=1]}(X_2=0) = \dfrac{2}{5}\,\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25}$;
$P\left([X_2=0]\cap[Z=2]\right) = P(\emptyset) = 0$;
$P\left([X_2=1]\cap[Z=0]\right) = P(\emptyset) = 0$;
$P\left([X_2=1]\cap[Z=1]\right) = P\left([X_2=1]\cap[X_1=0]\right) = P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_2=1) = \dfrac{3}{5}\,\dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{25}$;
$P\left([X_2=1]\cap[Z=2]\right) = P\left([X_2=1]\cap[X_1=1]\right) = P(X_1=1)P_{[X_1=1]}(X_2=1) = \dfrac{2}{5}\,\dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{25}$.

$X_2 \backslash Z$	0	1	2
0	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	0
1	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$

3. (a) On applique la formule des probabilités totales avec le s.c.e. formé par $[X_1=0]$ et $[X_1=1]$:

$$P(X_2=0) = P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_2=0) + P(X_1=1)P_{[X_1=1]}(X_2=0) = \frac{3}{5}.\frac{4}{5} + \frac{2}{5}.\frac{2}{5} = \frac{16}{25}\ ;$$

et donc $P(X_2=1) = \dfrac{9}{25}$.
Remarque :on pouvait également utiliser la loi du couple (X_2, Z) pour en déduire la marginale X_2.
On en déduit $E(X_2) = \dfrac{9}{25}$ et $V(X_2) = \dfrac{9}{25}.\dfrac{16}{25} = \dfrac{144}{625}$.

(b) On a $P([X_1=0]\cap[X_2=0]) = P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_2=0) = \frac{3}{5}\frac{1}{5} = \frac{3}{25}$.
Et $P(X_1=0)P(X_2=0) = \frac{3}{5}\frac{16}{25} = \frac{48}{125}$.
Or $\frac{3}{25} = \frac{15}{125} \neq \frac{48}{125}$. On a donc $P([X_1=0]\cap[X_2=0]) \neq P(X_1=0)P(X_2=0)$.
Conclusion : les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(c) Z prend les valeurs 0, 1 et 2.
On a $[Z=0] = [X_1=0]\cap[X_2=0]$; donc

$$P(Z=0) = P(X_1=0)P_{[X_1=0]}[X_2=0] = \frac{3}{5}.\frac{4}{5} = \frac{12}{25}\ .$$

On a $[Z=1] = ([X_1=0]\cap[X_2=1])\cup([X_1=1]\cap[X_2=0])$ (union disjointe) ; donc

$$P(Z=1) = P(X_1=0)P_{[X_1=0]}[X_2=1] + P(X_1=1)P_{[X_1=1]}[X_2=0] = \frac{3}{5}.\frac{1}{5} + \frac{2}{5}.\frac{2}{5} = \frac{7}{25}\ .$$

On a $[Z=2] = [X_1=1]\cap[X_2=1]$; donc

$$P(Z=2) = P(X_1=1)P_{[X_1=1]}[X_2=1] = \frac{2}{5}.\frac{3}{5} = \frac{6}{25}\ .$$

Remarque : on pouvait également utiliser la loi du couple (X_2, Z) pour en déduire la marginale Z.

(d) On déduit de la question précédente :

$$E(Z) = 0.\frac{12}{25} + 1.\frac{7}{25} + 2.\frac{6}{25} = \frac{19}{25}\ .$$

Puis

$$E(Z^2) = 0^2.\frac{12}{25} + 1^2.\frac{7}{25} + 2^2.\frac{6}{25} = \frac{31}{25}\ ;$$

et enfin

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{31}{25} - \frac{19^2}{25^2} = \frac{775}{625} - \frac{361}{625} = \frac{414}{625}\ .$$

4. L'événement «la première boule tirée est verte»est l'événement $[X_1=0]$. La probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$ est $P_{[X_1=0]}(U_1)$ et on a

$$P_{[X_1=0]}(U_1) = \frac{P(U_1\cap[X_1=0])}{P([X_1=0])} = \frac{P(U_1)P_{U_1}[X_1=0])}{P([X_1=0])}) = \frac{\frac{1}{2}.\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}\ .$$

5. (a) On utilise le tableau établi dans la question 2. :

$$E(X_2Z) = 0\times0\times\frac{12}{25} + 0\times1\times0 + 0\times2\times\frac{12}{25} + 1\times0\times0 + 1\times1\times\frac{3}{25} + 1\times2\times\frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}\ .$$

(b) On a $cov(X_2,Z) = E(X_2Z) - E(X_2)E(Z) = \frac{3}{5} - \frac{9}{25}\frac{19}{25} = \frac{375}{625} - \frac{171}{625} = \frac{204}{625}$.

(c) On a

$$cov(X_1,X_2) = cov(Z-X_2,X_2) = cov(Z,X_2) - cov(X_2,X_2) = cov(Z,X_2) - V(X_2)\ ;$$

et donc

$$cov(X_1,X_2) = \frac{204}{625} - \frac{144}{625} = \frac{60}{625}$$

Remarque : on retrouve le fait que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(d) On a

$$V(Z) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2cov(X_1, X_2) \ ;$$

ce qui donne

$$V(Z) = \frac{6}{25} + \frac{144}{625} + 2\frac{60}{625} = \frac{150 + 144 + 120}{625} = \frac{414}{625} \ .$$

On retrouve bien le résultat de la question 3.

6. (a)
```
def simulBer(p):
    a  = rd.random()
    if a < p:
        return 1
    else:
        return 0
```

(b)
```
def simulZ() :
    # on effectue tout d'abord une première épreuve de Bernoulli
    #pour décider de l'urne dans laquelle on effectue le premier tirage.
    X=simulBer(0.5)
    if X==1 : # alternative correspondant à un tirage dans l'urne 1
        X1 = simulBer(3/5)
    else : # alternative correspondant à un tirage dans l'urne 2
        X1 = simulBer(1/5)

    #On effectue maintenant le deuxième tirage
    if X1 == 1 :
        X2 = simulBer(3/5)
    else :
        X2 = simulBer(1/5)

    Z = X1 + X2
    return Z
```

(c)
```
S = 0
for i in range(10000):
    S = S + simulZ()

moy = S/10000
print(moy)
```

(d) Le résultat obtenu est bien proche de $E(Z) = 0,76$.

Exercice 2 (facultatif)

D'après EDHEC E 2015

Partie I

1. (a) Pour tout $t \in [0;x]$, on a $t^2 \leqslant x^2$, donc $1-t^2 \geqslant 1-x^2$. Or, on a également $1-x^2 > 0$ (car $0 < x < 1$, qui implique $x^2 < 1$). Donc $1-t^2 \geqslant 1-x^2 > 0$. Par conséquent, on peut passer à l'inverse et on obtient : $0 < \dfrac{1}{1-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1-x^2}$, ce qui donne, en multipliant par t^m (qui est positif ou nul) : $0 \leqslant \dfrac{t^m}{1-t^2} \leqslant \dfrac{t^m}{1-x^2}$.
On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x 0dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}dt$$

C'est-à-dire :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^m dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^m dt = \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. On en déduit :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Et donc, comme $x \leqslant 1$:

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}}$$

(b) On a sans difficulté : $\dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

2. (a) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $t^{2j} = (t^2)^j$. On reconnaît donc la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2, avec $t^2 \neq 1$. D'où :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-(t^2)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

(b) On intègre l'égalité ci-dessus sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}dt$$

C'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^{2j}dt = \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x = \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$. Donc finalement :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

(c) D'après la question 1.(b) : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

Conclusion : la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

C'est-à-dire, d'après les questions 2.(b) et 2.(c) :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

Les $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$ se simplifient de chaque côté, et on en déduit :

$$\boxed{\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

Partie II

1. La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier succès (obtenir pile) à une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (les lancers de pièce), chacune ayant une probabilité de succès égale à p.

   Par conséquent, $\boxed{N \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$.

2. (a) La commande `np.floor` renvoie la partie entière d'un nombre. Il faut donc montrer que $2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$ est égal à m si et seulement si m est pair. Pour cela, on fait une disjonction de cas :
   - Si m est pair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k$. Ceci implique $\dfrac{m}{2} = k$, et donc $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor = k$ également. Par conséquent, $2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor = 2k = m$.
   - Si m est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k-1$. Ceci implique $\dfrac{m}{2} = k - \dfrac{1}{2}$, et donc $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor = k-1$. Par conséquent, $2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor = 2k-2 = m-1 \neq m$.

Ainsi, on a montré que $2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor = m$ si et seulement si m est pair.

Conclusion : la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie donc la valeur de m si et seulement si m est pair.

(b)

```
p = float(input('donner la valeur de p'))

N = rd.geometric(p)

X = rd.randint(1,N+1)

if 2*np.floor(m/2) == m:
    print('le joueur a perdu')
else :
    print('le joueur a gagné')
```

3. (a) Si $k \geqslant j$, alors $2k+1 > 2j$. Il est donc impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j$. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j}$.

(b) De même, si $k \geqslant j+1$, alors $k > j$ et donc $2k+1 > 2j+1$. Par conséquent, il est impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j+1$. On en déduit que $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j+1}$.

(c) Si k appartient à $[[0; j-1]]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j-1$ et donc, en particulier : $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j$. De plus, une fois l'urne remplie avec les boules numérotées de 1 à $2j$, chaque boule a la même probabilité d'être tirée. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \dfrac{1}{2j} \text{ si } k \leqslant j-1}$.

(d) De même, si k appartient à $[[0; j]]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j+1$. En remplissant l'urne avec des boules numérotées de 1 à $2j+1$, la boule numérotée $2k+1$ peut donc être tirée. Et comme il y a équiprobabilité : $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = \dfrac{1}{2j+1} \text{ si } k \leqslant j}$.

4. (a) Comme N suit une loi géométrique, on a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $\Big([N = n]\Big)_{n\geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(X = 2k+1)}$$

Maintenant, on sépare la somme en deux (comme indiqué dans l'énoncé) entre, d'un côté les n pairs (qui s'écrivent sous la forme $2j$) et d'un autre côté les termes impairs (qui s'écrivent sous la forme $2j+1$) :

$$\begin{aligned} P(X = 2k+1) = &\sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j) P_{(N=2j)}(X = 2k+1) \\ &+ \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j+1) P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) \end{aligned}$$

On remplace $P(N=2j)$ et $P(N=2j+1)$ en se servant de la loi de N :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1) &= \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j-1} P_{(N=2j)}(X=2k+1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j} P_{(N=2j+1)}(X=2k+1) \\ &= \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j} P_{(N=2j)}(X=2k+1) \\ &\quad + \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j+1} P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\end{aligned}$$

Enfin, on remplace $P_{(N=2j)}(X=2k+1)$ et $P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)$ en se servant de la question 3 :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j} P_{(N=2j)}(X=2k+1) \\ &\quad + \frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1} P_{(N=2j+1)}(X=2k+1) \quad \text{(questions 3.a et 3.b)} \\ &= \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}\frac{1}{2j} \\ &\quad + \frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}\frac{1}{2j+1} \quad \text{(questions 3.c et 3.d)}\end{aligned}$$

D'où, en mettant $\frac{p}{q}$ en facteur :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)}$$

(b) D'après la question I.2.d et la partie admise juste après, on a (en remplaçant dans l'égalité ci-dessus) :

$$P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)$$

(on peut bien remplacer x par q car q appartient à $[0;1[$).
On simplifie :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right) \\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}(t+1)}{(1-t)(1+t)}dt\end{aligned}$$

Ce qui donne bien (en simplifiant par $t+1$) :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt}$$

5. (a) Pour tout $t \in [0;q]$, on a $t \leqslant q < 1$, donc $1-t \geqslant 1-q > 0$, et donc, en prenant l'inverse :

$$0 < \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-q}$$

D'où, en multipliant par $\dfrac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$ (qui est positif ou nul car $t \geqslant 0$, $1-t \geqslant 0$ et $1+t \geqslant 0$) :

$$0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \leqslant \frac{1}{1-q} \times \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$$

On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;q]$:

$$0 \leqslant \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \leqslant \frac{1}{1-q}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (question I.1.b). On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

(b) On fait la somme en se servant du résultat de la question 4.(b) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt\right)\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{1-t}\right)dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\right)dt\end{aligned}$$

On reconnaît (à l'intérieur de l'intégrale) la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2 (avec $t^2 \neq 1$). Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t} \times \frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}\right)dt\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}dt\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\end{aligned}$$

Ce qui donne bien, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)}$$

(c) L'événement A est l'événement " X est impair". On a donc $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [X = 2k+1]$ (union disjointe). D'où

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1)\ ;$$

et donc

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1) \ .$$

On a donc, d'après la question précédente,

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right) \ ;$$

c'est-à-dire, d'après la question 5.(a) :

$$\boxed{P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt}$$

6. (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a(1-t)(1+t) + b(1-t)^2 + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)} \\ &= \frac{a(1-t^2) + b(1-2t+t^2) + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)} \\ &= \frac{(-a+b)t^2 + (-2b+c)t + (a+b+c)}{(1-t)^2(1+t)}\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, ceci est égal à $\dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ si $\left\{\begin{array}{rcl} -a+b &=& 0 \\ -2b+c &=& 0 \\ a+b+c &=& 1 \end{array}\right.$. On résout ce système :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{rcl} -a+b &=& 0 \\ -2b+c &=& 0 \\ a+b+c &=& 1 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& b \\ c &=& 2b \\ a+b+c &=& 1 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& b \\ c &=& 2b \\ 4b &=& 1 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1/4 \\ c &=& 1/2 \\ b &=& 1/4 \end{array}\right.\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

avec $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

(b) On reprend le résultat de la question 5.(c) et on calcule l'intégrale en se servant de la question

précédente :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{2}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}dt\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^q + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^q + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)\right) \\
&= \frac{1-q}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right) \\
&= \frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne, en développant :

$$\boxed{P(A) = \frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}}$$

(c) On a $0 < 1-q < 1+q$ (car $q \in]0;1[$). On en déduit que $\dfrac{1+q}{1-q} > 1$, et donc $\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$.
De plus, $\dfrac{1-q}{4q} > 0$ car $1-q > 0$ et $4q > 0$. Donc $\dfrac{1-q}{4q}\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$.
On en déduit, avec l'expression obtenue à la question précédente :

$$\boxed{P(A) > \frac{1}{2}}$$