DM n°2

À rendre le 06/11/2026

Exercice 1

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 3 boules rouges et 2 boules vertes ; L'urne $\mathcal{U}_2$ contient 1 boules rouges et 4 boules vertes.
On choisit une des deux urnes au hasard (chacune ayant la même probabilité d'être choisie) ; puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne. Ensuite,

- si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$;
- si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

On définit alors deux variables aléatoires X_1 et X_2 par :

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte} \end{cases} \quad ; \quad X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte} \end{cases}$$

On pose également $Z = X_1 + X_2$.

1. (a) Déterminer $P([X_1 = 1])$ (on détaillera la méthode utilisée). Quelle loi suit X_1 ?
   (b) Donner $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. (a) Montrer que $P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = \dfrac{12}{25}$.
   (b) Donner sous forme d'un tableau la loi du couple (X_2, Z).
3. (a) Déterminer la loi de X_2, ainsi que $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
   (b) les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer la loi de Z.
   (d) Calculer $E(Z)$ et montrer que $V(Z) = \dfrac{414}{625}$.
4. On considère l'événement «la première boule tirée est verte». Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
5. On se propose dans cette question de calculer $V(Z)$ par une autre méthode.
   (a) Calculer $E(X_2 Z)$.
   (b) Montrer que $cov(X_2, Z) = \dfrac{204}{625}$.
   (c) En déduire la valeur de $cov(X_1, X_2)$.
   (d) Utiliser le résultat précédent pour calculer $V(Z)$.
6. On cherche maintenant à simuler cette expérience aléatoire afin d'obtenir une estimation empirique de $E(Z)$.
   (a) On aura plusieurs épreuves de Bernoulli à simuler. Écrire tout d'abord une fonction `simulBer(p)` qui renvoie 1 avec une probabilté p et 0 avec une probabilité $1 - p$.
   On supposera le module `numpy.random` importé par la commande `import numpy.random as rd`. On rappelle qu'alors la commande `rd.random()` renvoie un nombre aléatoire choisi uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$.

(b) Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z obtenue.

```
def simulZ() :
    # on effectue tout d'abord une première épreuve de Bernoulli
    #pour décider de l'urne dans laquelle on effectue le premier tirage.
    X=simulBer(...)
    if X==1 : # alternative correspondant à un tirage dans l'urne 1
        X1 = simulBer(...)
    else : # alternative correspondant à un tirage dans l'urne 2
        ...

    #On effectue maintenant le deuxième tirage
    if X1 == 1 :
        X2 = ...
    else :
        X2 = ...

    Z = ...
    return Z
```

(c) Écrire une suite d'instructions (utilisant la fonction précédente) permettant de simuler 10000 fois l'expérience aléatoire et d'obtenir une valeur empirique de $E(Z)$.

(d) Après exécution de ce programme, on obtient la valeur $0,7625$.
Cette valeur est-elle cohérente avec la valeur théorique de $E(Z)$?

Exercice 2 (facultatif)

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. (a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

2. (a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$.

   (c) Utiliser la question 1 pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

(d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt.$

On admet sans démonstration que l'on a aussi :
$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt.$

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce.
Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.

Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne.
On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : " le joueur gagne ".
On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1. Reconnaître la loi de N.

2. (a) On suppose le module `numpy` importé par la commande `import numpy as np`. Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

   (b) Compléter les commandes `Python` suivantes pour qu'elles simules N et X puis renvoient l'un des deux messages " le joueur a gagné " ou " le joueur a perdu ".
   On suppose le module `numpy.random` importé par la commande `import numpy.random as rd`.
   On rappelle qu'alors la commande `rd.geometric(p)` simule une variable alétoire de loi géométrique de paramètre `p` et `rd.randint(a,b)` simule une variable alétoire de loi uniforme discrète sur `{a,...,b-1}`.

```
p = float(input('donner la valeur de p'))

N = rd.geometric(...)

X = rd.randint(...,...)

if ... :
    print('...')
else :
    print('...')
```

3. (a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$.

(b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$.

(c) Déterminer $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[[0, j-1]]$.

(d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[[0, j]]$.

4. (a) Justifier que $P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X = 2k+1)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

(b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$.

5. (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt = 0$.

(b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

(c) En déduire que : $P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt$.

6. (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

(b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q.

(c) En déduire que $P(A) > \frac{1}{2}$.