Programme des colles des semaines S7-S8

Révisions : Calcul matriciel, systèmes linéaires

- Systèmes linéaires
- Règles de calcul sur les matrices
- Définition de l'inverse
- Calcul de l'inverse (directement, à l'aide d'un polynôme annulateur)

Chapitre : Espaces vectoriels

1. Espace vectoriel : définition, exemples usuels, règles de calcul, combinaisons linéaires
2. Sous espace vectoriel :
   - définition, caractérisation
   - SEV engendré par une famille de vecteurs
3. Bases
   - Famille libre, famille génératrice d'un SEV
   - Cas particuliers : une famille à un élément est libre ssi cet élément est non nul. Une famille formée de deux vecteurs est libre ssi ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
   - Prop : Si on enlève un élément à une famille libre, on a toujours une famille libre. Si on ajoute un élément du SEV F à une famille génératrice de F, on a toujours une famille génératrice de F.
   - Base : définition (libre et génératrice), caractérisation (par le fait que tout élément de l'espace se décompose de manière unique comme combinaison linéaire d'élément de cette famille).
   - Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Dimension
   - Définition
   - Liens entre la dimension d'un espace vectoriel et le nombre d'éléments d'une famille libre, d'une famille génératrice.
   - Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille à n éléments est une base ssi elle est libre ssi elle est génératrice.
   - Prop : Si F est un SEV de E, alors $\dim(F) \leq \dim(E)$; et on a $\dim(F) = \dim(E)$ ssi $F = E$.
5. Rang
   - Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice
   - $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

Questions de cours

- **Famille libre :** Définition. Montrer que dans $\mathbb{R}_2[x]$ la famille formée par $x \mapsto x+1$, $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto x^2$ est libre.
- **Famille libre :** Définition. Montrer si on enlève un élément à une famille libre, on obtient une famille libre.
- **Famille génératrice :** Définition. Montrer (à partir de la définition) que $\mathcal{F} = ((2,0,-2),(1,-2,0),(2,-2,-10),(1,1,1))$, est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- **Dimension :** Définition ; liens entre la dimension d'un espace vectoriel et le nombre d'éléments d'une famille libre, d'une famille génératrice.
  Rem : ces propriétés sont admises.