

# INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE

## Introduction

On a vu en première année que l'intégrale donne un sens mathématique précis à la notion d'aire sous une courbe sur un intervalle  $[a, b]$ . Grâce aux intégrales généralisées (on dit aussi impropres), on verra dans ce cours que l'on peut donner un sens à l'aire sous une courbe entre, par exemple, 1 et  $+\infty$ . Il y aura cependant des restrictions : sur  $[1, +\infty[$  l'aire sous la courbe  $y = 1/x^2$  a un sens tandis que celle sous la courbe  $y = 1/x$  n'en a pas. Notre but principal est de disposer d'un outil pour l'étude des variables aléatoires à densité.

## 1 Rappels sur l'intégrale sur un intervalle $[a, b]$

On ne rappelle pas la définition de l'intégrale et on ne détaille pas ses premières propriétés, elles seront rappelées dans le cadre des intégrales généralisées.

### 1.1 Théorème fondamental du calcul intégral

La propriété fondamentale concernant le calcul intégral est la suivante :

**Théorème 1.1** (Théorème fondamental de l'analyse). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue ( $I$  étant un intervalle). Soit  $a \in I$ . Alors la fonction définie, pour  $x \in I$ , par :*

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

*est une primitive de  $f$  (celle qui s'annule en  $a$ ).*

On utilise la plupart du temps son corollaire :

**Corollaire 1.2.** *Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ ,  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$  et  $a, b$  deux points de  $I$ . Alors*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Notation :

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

### 1.2 Calculs de primitives

Le tableau suivant donne les primitive des fonctions usuelles :

Fonction	Sur l'intervalle	Primitives
$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto x + c$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^2}{2} + c$
$x \mapsto x^n$ ( $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ )	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ ; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $n < 0$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto x^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ )	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \ln(x) + c$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x + c$

**Calculs à l'aide de composées** On sait que si  $u$  et  $v$  sont dérivables, alors  $v \circ u$  a pour dérivée  $u' \times (v' \circ u)$ . On sait donc trouver une primitive de toute fonction qui s'écrit  $x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$ .

On peut retenir les cas particuliers suivants :

Fonction	Primitives	Remarques
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + c$	on suppose que $u$ est à valeurs $> 0$
$u' e^u$	$e^u + c$	
$u' u^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + c$	on suppose que $\alpha \neq -1$ et, si $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , $u$ est à valeurs $> 0$

### 1.3 Autres méthodes de calcul d'intégrale

Une méthode d'usage courant est l'intégration par parties :

**Propriété 1.3** ("formule d'intégration par parties"). Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ . Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Autre méthode, le changement de variable :

**Propriété 1.4.** Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $[a, b]$ ,  $f$  une fonction continue sur  $\varphi([a, b])$  ; alors on a :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du .$$

## 2 Intégrale généralisée en $\pm\infty$

### 2.1 Définitions

**Définition 2.1.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; +\infty[$ . On dit alors que l'intégrale de  $f$  est généralisée (on dit aussi impropre) en  $+\infty$ .

L'intégrale de  $f$  sur  $[a; +\infty[$  est dite convergente lorsque la fonction définie sur  $[a; +\infty[$  par  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . On note alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt .$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge. De même on dit que l'intégrale d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $]-\infty; a]$  est convergente si la fonction définie sur  $]-\infty; a]$  par  $x \mapsto \int_x^a f(t)dt$  admet une limite finie en  $-\infty$  et on note alors

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t)dt .$$

**Remarque 2.2.** Dans le cas où  $f$  est continue sur  $[a, +\infty[$ , si  $b \in [a, +\infty[$ , alors l'intégrale de  $f$  est convergente sur  $[a, +\infty[$  ssi l'intégrale de  $f$  est convergente sur  $[b, +\infty[$ .

**Exemples 2.3.** Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. intégrale sur  $[1, +\infty[$  de  $x \mapsto \frac{1}{x^3}$

3. intégrale sur  $[1, +\infty[$  de  $x \mapsto \frac{1}{x}$

2. intégrale sur  $]-\infty, 0]$  de  $x \mapsto e^x$

**Définition 2.4.** Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $]-\infty; +\infty[$ . On dit alors que l'intégrale de  $f$  est impropre en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

L'intégrale est dite convergente lorsque, pour  $c$  arbitraire, les intégrales de  $f$  sur  $]-\infty; c]$  et sur  $[c; +\infty[$  sont convergentes (on montre que cela ne dépend pas du choix de  $c$ ) ; dans ce cas, on pose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt .$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

**Exemple 2.5.** Étudier la convergence de l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  de  $f : x \mapsto \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$ .

## 2.2 Intégrales de références

Certaines intégrales serviront de point de comparaison et sont à retenir.

**Propriété 2.6** (Intégrales de Riemann). Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'intégrale sur  $[1; +\infty[$  de  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est convergente ssi  $\alpha > 1$ . Il en est de même sur  $]-\infty; -1]$  lorsque  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

**Démonstration :**

**Propriété 2.7** (Intégrales de fonctions exponentielles). Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'intégrale sur  $[0; +\infty[$  de  $x \mapsto e^{\alpha x}$  est convergente ssi  $\alpha < 0$ .

**Démonstration :**

### 3 Propriétés

Les propriétés des intégrales impropres découlent de celles de l'intégrale sur un intervalle  $[a, b]$ .

On se place sur un intervalle  $I = [a, +\infty[$ . Les propriétés sont les mêmes sur un intervalle  $] -\infty, a]$ . Les fonctions sont supposées continues sur leur intervalle de définition.

Ces propriétés sont admises.

**Propriété 3.1** (linéarité). Si l'intégrale d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, +\infty[$  est convergente, et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors l'intégrale sur  $[a, +\infty[$  de  $\lambda f$  est convergente et

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx .$$

Si les intégrales sur un intervalle  $[a, +\infty[$  des fonctions  $f$  et  $g$  sont convergentes, alors l'intégrale sur  $I$  de  $(f + g)$  est convergente et

$$\int_a^{+\infty} (f + g)(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} g(x) dx .$$

**Définition 3.2** (Échange des bornes). On suppose que l'intégrale d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, +\infty[$  est convergente.

On pose alors

$$\int_{+\infty}^a f(x) dx = - \int_a^{+\infty} f(x) dx .$$

**Propriété 3.3** (Relation de Chasles). On suppose que l'intégrale d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, +\infty[$  est convergente.

Pour  $c \in [a, +\infty[$ , l'intégrale de  $f$  sur  $[c, +\infty[$  est convergente et

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx .$$

Cette formule reste valable lorsque les bornes sont "inversées".

**Propriété 3.4** (Croissance de l'intégrale). On suppose que l'intégrale des fonctions  $f$  et  $g$  sur  $[a, +\infty[$  convergent et que, pour tout  $x \in [a, +\infty[$ ,  $f(x) \leq g(x)$ . On a alors :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx .$$

**Propriété 3.5** (Intégrale et parité). *On suppose que  $f$  est définie sur  $] - \infty, +\infty[$  et paire ou impaire. Si l'intégrale de  $f$  sur  $[0, +\infty[$  converge, alors l'intégrale de  $f$  sur  $] - \infty, +\infty[$  converge et on a :*

- si  $f$  est paire,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx$  ;
- si  $f$  est impaire,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$ .

## 4 Utilisation des comparaisons de fonctions

On se place à nouveau sur un intervalle  $I = [a, +\infty[$ . Les résultats s'adaptent aux intégrales généralisées sur un intervalle  $] - \infty, a]$ . Les fonctions sont supposées continues sur leur intervalle de définition.

On commence par le rappel de deux propriétés :

1. Soit  $f$  une fonction croissante sur un intervalle  $[a, +\infty[$ .  
Si  $f$  est majorée par une constante  $M$  sur  $[a, +\infty[$ , alors  $f$  admet une limite finie  $l$  en  $+\infty$ . De plus, on a  $l \leq M$  et pour tout  $x$  dans  $[a, +\infty[$ ,  $f(x) \leq l$ .  
Si  $f$  n'est pas majorée sur  $[a, +\infty[$ , alors  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .
2. Soit  $f$  une fonction continue et à valeurs positives sur un intervalle  $[a, +\infty[$ . Alors la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est croissante sur  $[a, +\infty[$ . En effet, sa dérivée est  $f$ .

On en déduit des propriétés rappelées ci-dessus le fait suivant :

**Lemme 4.1.** *Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a, +\infty[$ . Alors l'intégrale de  $f$  sur  $[a, +\infty[$  est convergente si et seulement si la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est majorée.*

**Démonstration :**

**Propriété 4.2.** *Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues définies sur  $[a, +\infty[$ . On suppose que pour tout  $x \in [a, +\infty[$ ,  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ .*

*Alors si l'intégrale sur  $[a, +\infty[$  de  $g$  est convergente, l'intégrale de  $f$  sur  $[a, +\infty[$  l'est aussi et on a :*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx .$$

**Démonstration :**

**Propriété 4.3.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions positives et continues définies sur  $[a, +\infty[$ . On suppose que lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on a  $f = o(g)$ . Alors si l'intégrale sur  $[a, +\infty[$  de  $g$  est convergente, l'intégrale de  $f$  sur  $[a, +\infty[$  l'est aussi.

**Démonstration :**

**Propriété 4.4.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions positives et continues définies sur  $[a, +\infty[$ . On suppose que lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on a  $f \sim g$ . Alors les intégrales sur  $[a, +\infty[$  de  $f$  et  $g$  sont de même nature.

**Démonstration :**

**Exemples 4.5.** Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1.  $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$  sur  $[0; +\infty[$

2.  $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$  sur  $[1; +\infty[$

3.  $x \mapsto x^3 e^{-x}$  sur  $[0; +\infty[$

## 5 Convergence absolue

On se place à nouveau sur un intervalle  $I = [a, +\infty[$ . Les fonctions sont supposées continues sur leur intervalle de définition.

**Définition 5.1.** On dit que l'intégrale d'une fonction  $f$  sur  $[a, +\infty[$  est absolument convergente lorsque l'intégrale de la fonction définie sur  $I$  par  $x \mapsto |f(x)|$  est convergente.

**Propriété 5.2** (admise). Si l'intégrale de  $f$  est absolument convergente sur  $[a, +\infty[$ , alors elle est convergente. On a de plus :

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

La convergence absolue permet d'appliquer les techniques de comparaison à des fonctions qui ne sont pas à valeurs positives.

**Exemples 5.3.** Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1.  $f : x \mapsto \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^5 - 3x^2 + 6x - 1}$  sur  $[0, +\infty[$

2.  $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$  sur  $] -\infty, -1]$

## 6 Fonctions continues par morceaux

Les propriétés ont été énoncées pour des fonctions continues pour des raisons de simplicité de l'exposition. Dans le chapitre sur les loi de probabilité à densité, ces densités seront souvent continues par morceaux. La plupart des propriétés restent valables dans ce cas. Une exception cependant : la dérivabilité de  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ .

**Exemple 6.1.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 1$  si  $x \in [0, 1]$  et  $f(x) = 0$  sinon. On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ .  
Calculer  $F$  et étudier sa dérivabilité.