DM n°4

À rendre le 07/01/2025

Exercice 1

Partie I

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer $A^2 - 7A$.
   (b) En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.
   (c) Trouver alors toutes les valeurs propres de A, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous espace propre associé.
   (d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice : $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer le noyau de f. En déduire une valeur propre de f et l'espace propre associé.
   (b) Déterminer le rang de la matrice $B - 2I_3$.
   (c) Calculer $f(e_1 - e_2 - e_3)$.
   (d) Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme f est diagonalisable.
3. Trouver une matrice P inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous :
   - La matrice $D_2 = P^{-1}\ B\ P$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
   - Les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite),
   - La matrice $D_1 = P^{-1}\ A\ P$ est également diagonale.

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $\quad X_{n+2} = \dfrac{1}{6} A X_{n+1} + \dfrac{1}{6} B X_n$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = P^{-1} X_n$.

1. Démontrer que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad Y_{n+2} = \dfrac{1}{6} D_1 Y_{n+1} + \dfrac{1}{6} D_2 Y_n$.
2. Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\ a_{n+1} + \dfrac{1}{2}\ a_n \\[2ex] b_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\ b_{n+1} \\[2ex] c_{n+2} & = \dfrac{2}{3}\ c_{n+1} + \dfrac{1}{3}\ c_n \end{cases}$$

3. Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer les matrices Y_0 et Y_1.

4. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

5. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

6. (a) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
import numpy as np

def X(n):
    A = np.array ([[2,1,-2],[0, 3,0],[ 1, -1, 5]])
    B = np.array ([[1,-1,-1],[ -3,3,-3],[-1, 1, 1]])
    Xold = np.array( [3,0,-1])
    Xnew = np.array([3,0,-2])
    for i in range(2,n+1):
        Aux = ................
        Xold = ................
        Xnew = ..............
    return Xnew
```

   (b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure 1) les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.
   Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.

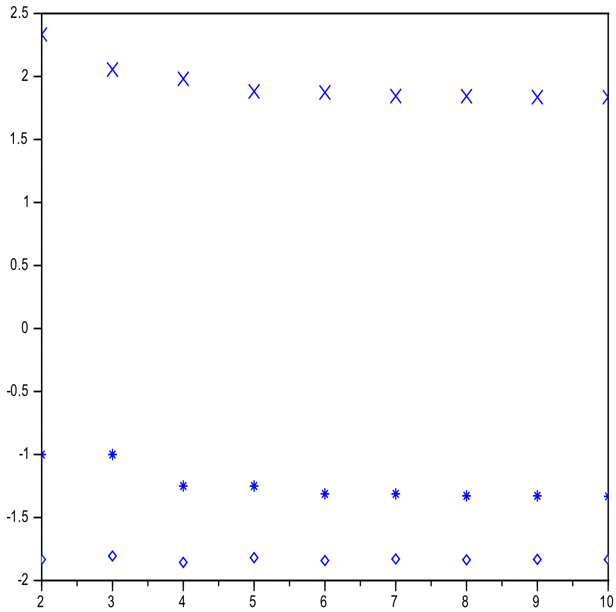

figure 1

Exercice 2 (facultatif)

On se propose dans cet exercice de déterminer un encadrement de la somme de la série :

$$\sum \frac{2ne^{-n^2}}{1+e^{-n^2}}$$

1. (a) Justifier l'équivalence de suites :

$$\frac{2ne^{-n^2}}{1+e^{-n^2}} \sim 2ne^{-n^2}$$

   (b) En déduire la convergence de la série $\sum \frac{2ne^{-n^2}}{1+e^{-n^2}}$.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$ne^{-n^2} \leq \frac{2ne^{-n^2}}{1+e^{-n^2}} \leq 2ne^{-n^2}$$

2. Soit $f : x \mapsto 2xe^{-x^2}$.

   (a) Montrer que f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

   (b) En déduire que pour tout entier $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \leq 2ke^{-k^2} \leq \int_{k-1}^{k} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx}$$

   puis que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\int_2^{n} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \leq \sum_{k=2}^{n} 2ke^{-k^2} \leq \int_1^{n+1} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx}$$

   (c) Montrer :

$$\int_1^{+\infty} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} = e^{-1}$$

   et

$$\int_2^{+\infty} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} = e^{-4}.$$

   (d) En déduire :

$$\frac{2e^{-1}}{1+e^{-1}} + \frac{e^{-4}}{2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2ne^{-n^2}}{1+e^{-n^2}} \leq \frac{2e^{-1}}{1+e^{-1}} + e^{-1}$$

Exercice 3 (facultatif)

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \int_1^x \frac{\exp(t)}{t} \mathrm{dt}$$

On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(x)$.

1. (a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
   Minorer $\frac{1}{t}$ pour tout t de $[1, x]$, puis montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $f(x) \geq \dfrac{\exp(x) - e}{x}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (c) Justifier l'existence, sur $[1, +\infty[$, de la dérivée f' de la fonction f et montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\exp(x)}{x}$.
   (d) Montrer que la fonction f est convexe sur $[1, +\infty[$.
   (e) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 ?

Dans la suite, on se propose de déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

2. (a) Dresser le tableau de variation de la fonction g définie par :
$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad g(t) = \frac{\exp(t)}{t^3}$$
   (b) En déduire l'encadrement : $0 \leq \displaystyle\int_1^3 g(t) \mathrm{dt} \leq 2e$.
   (c) Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 3, on a l'encadrement :
$$0 \leq \int_3^x g(t) \mathrm{dt} \leq \frac{x - 3}{x^3} \exp(x)$$

3. (a) Grâce à une intégration par parties, montrer que, pour tout réel x de $[1 + \infty[$, on a :
$$f(x) = \frac{\exp(x)}{x} - e + \int_1^x \frac{\exp(t)}{t^2} \mathrm{dt}$$
   (b) À l'aide d'une deuxième intégration par parties, établir l'égalité suivante :
$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\exp(x)}{x} + \frac{\exp(x)}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) \mathrm{dt}$$

4. (a) Utiliser les questions précédentes pour déterminer un encadrement de $f(x)$ qui soit valable pour tout réel x de $[3, +\infty[$.
   (b) En déduire un équivalent de f en $+\infty$.