Corrigé du DM n°4

À rendre le 07/01/2025

Exercice 1

D'après ECRICOME E 2018 Ex1

Partie I

1. (a) Le calcul donne

$$A^2-7A=\begin{pmatrix}-12&0&0\\0&-12&0\\0&0&-12\end{pmatrix}=-12I_3$$

(b) La relation matricielle obtenue à la question précédente permet de voir que le polynôme $X^2-7X+12$ est un polynôme annulateur de A. Par conséquent, les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de ce dernier. Un rapide calcul de discriminant permet de voir que les deux racines sont 4 et 3, ce qui répond à la question posée.

(c) On résout les équations

$$\begin{aligned}u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}(A-3I_3)&\iff\left\{\begin{array}{rcl}2x+y-2z&=&3x\\3y&=&3y\\x-y+5z&=&3z\end{array}\right.\\&\iff x-y+2z=0\\&\iff u=\begin{pmatrix}y-2z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On en déduit que 3 est bien valeur propre de A et que la famille

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

engendre le sous-espace propre associé, noté E_3. Les deux vecteurs susmentionnés étant clairement non colinéaires, ils forment une base de E_3 dont la dimension est alors égale à 2. On fait la même chose pour 4:

$$\begin{aligned}u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}(A-4I_3)&\iff\left\{\begin{array}{rcl}2x+y-2z&=&4x\\3y&=&4y\\x-y+5z&=&4z\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{rcl}-2x-y+2z&=&0\\y&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}z&=&-x\\y&=&0\end{array}\right.\\&\iff u=\begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il suit que 4 est bien valeur propre et que le sous-espace propre associé, noté E_4 est de dimension 1, et qu'une base est par exemple

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont bien 3 et 4:

$$\operatorname{sp}(A)=\{3;4\}.$$

(d) On voit notamment que 0 n'est pas valeur propre, ce qui équivaut que fait que A est bien inversible. De plus, la somme des dimensions des sous-espaces propres est bien égale à celle de l'espace tout entier

$$\dim(E_3) + \dim(E_4) = 2 + 1 = 3,$$

ce qui garantit que A est diagonalisable.

2. (a) Il faut résoudre.

$$\begin{aligned} u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z &=& 0 \\ -3x + 3y - 3z &=& 0 \\ -x + y + z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff u = x(1, 1, 0) \end{aligned}$$

Ainsi, le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, ce qui permet d'affirmer que 0 est valeur propre de f et que l'espace propre associé est

$$E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0)\right).$$

(b) On observe que

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et il est alors clair que

$$\mathrm{Im}(B - 2I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, $\mathrm{rg}(B - 2I_3) = 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(B - 2I_3)) = 1$ et $B - 2I_3$ non inversible donc 2 est donc valeur propre de f.

(c) Le calcul donne

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ;$$

donc $f(e_1 - e_2 - e_3) = 3\,(e_1 - e_2 - e_3)$. Ainsi 3 est valeur propre de f.

(d) Les questions précédentes nous fournissent trois valeurs propres distinctes pour f (qui sont $0, 2$ et 3) donc f est diagonalisable.

3. Remarque : on nous demande en fait de montrer que P est la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres à la fois pour A et pour f.

D'après les questions a,b et c, f a les valeurs propres suivantes (en prenant l'ordre cohérent avec D_2) :

- 3 ; et d'après la question c, $(1, -1, -1)$ est un vecteur propre associé.
- 0 , et d'après la question a, $(1, 1, 0)$ est un vecteur propre associé.
- 2 ; pour laquelle on n'a pas encore calculé de vecteur propre. On remarque que

$$B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ;$$

et donc $(-1, 0, 1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2..

On sait alors que ces trois vecteurs propres, associés à des valeurs propres distinctes, forment une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, en notant P la matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

alors, d'après la formule de changement de base, $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les deux premières conditions sont donc vérifiées.

On sait par ailleurs que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3, et que $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4. Par ailleurs

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \;;$$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur 3. On en déduit que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Les trois conditions sont donc bien vérifiées.

Partie II

1. On injecte la définition de Y_n mais on commence par observer que

$$P^{-1}A = D_2P^{-1}, \qquad \text{et} \qquad P^{-1}B = D_1P^{-1}.$$

$$\begin{array}{rcl} Y_{n+2} & = & P^{-1}X_{n+2} \\ & = & P^{-1}\left(\dfrac{1}{6}AX_{n+1} + \dfrac{1}{6}BX_n\right) \\ & = & \dfrac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \dfrac{1}{6}P^{-1}BX_n \\ & = & \dfrac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1} + \dfrac{1}{6}D_2P^{-1}X_n \\ & = & \dfrac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \dfrac{1}{6}D_2Y_n, \end{array}$$

ce qu'on voulait.

2. Comme

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la relation précédente donne immédiatement

$$\begin{array}{rcl} Y_{n+2} = \dfrac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \dfrac{1}{6}D_2Y_n & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & \frac{1}{6} \times 3a_{n+1} + \frac{1}{6} \times 3a_n \\ b_{n+2} & = & \frac{1}{6} \times 3b_{n+1} + 0 \\ c_{n+2} & = & \frac{1}{6} \times 4c_{n+1} + \frac{1}{6} \times 2c_n \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} & = & \frac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} & = & \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{array} \right. , \end{array}$$

ce qu'on nous demandait.

3. Comme clairement

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice introduite comme P^{-1} est bien l'inverse de P (par unicité de celle-ci). Ensuite, on obtient

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. On reconnait deux suites à récurrence linéaire d'ordre 2 ((a_n) et (c_n)) et pour b_n une suite géométrique de raison 1/2. On commence par celle-ci car c'est la plus immédiate à exprimer

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Pour les deux autres, on suit le protocole du cours, en commençant par introduire l'équation caractéristique. Pour (a_n), celle ci est

$$q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0 \iff q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$a_n = \lambda \times 1^n + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

où λ et μ sont à déterminer avec les conditions initiales. En injectant les valeurs pour $n = 0$ et $n = 1$, on trouve

$$a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Enfin, pour (c_n), l'équation caractéristique est

$$q^2 - \frac{2}{3}q - \frac{1}{3} = 0 \iff q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$c_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

et on applique la même méthode pour trouver λ et μ, pour obtenir

$$c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

5. Par définition

$$Y_n = P^{-1}X_n \iff X_n = PY_n.$$

Ou encore

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

On veut seulement β_n, résultat de la deuxième ligne de P appliquée à Y_n, et on trouve

$$\beta_n = -a_n + b_n = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

et on retrouve l'égalité demandée.

6. Le programme demandé reprend la structure classique d'un programme permettant le calcul des termes d'une suite à récurrence linéaire d'ordre 2.

```
import numpy as np

def X(n):
    A = np.array ([[2,1,-2],[0, 3,0],[ 1, -1, 5]])
    B = np.array ([[1,-1,-1],[ -3,3,-3],[-1, 1, 1]])
    Xold = np.array( [3,0,-1])
    Xnew = np.array([3,0,-2])
    for i in range(2,n+1):
        Aux = Xold
        Xold = Xnew
        Xnew = (1/6)*np.dot(A,Xnew) + (1/6)*np.dot(B,Aux)
    return Xnew
```

7. Pour chaque suite, le dernier terme représenté correspond à $n = 10$. Pour cette valeur de n, les termes de chaque suite sont proches de leurs limites. On voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6} \sim 1.8, \qquad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = -\frac{4}{3} \sim -1.3$$

Ainsi, la suite avec des croix $\times$ correspond à (α_n), celle avec des croix entourées à (β_n) et celle avec des losanges à (γ_n).

Exercice 2 (facultatif)

On se propose dans cet exercice de déterminer un encadrement de la somme de la série :

$$\sum \frac{2ne^{-n^2}}{1+e^{-n^2}}$$

1. (a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + e^{-n^2} = 1$, donc

$$\frac{2ne^{-n^2}}{1+e^{-n^2}} \sim 2ne^{-n^2} .$$

(b) Par comparaison de séries à termes positifs, il suffit, pour montrer la convergence de la série $\sum \frac{2ne^{-n^2}}{1+e^{-n^2}}$, de montrer celle de la série $\sum 2ne^{-n^2}$.
On remarque que

$$\frac{2ne^{-n^2}}{1/n^2} = \frac{2n^3}{e^{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissances comparées.
Ainsi, $2ne^{-n^2} = o\left(1/n^2\right)$. Or la série de terme général $1/n^2$ converge (série de Riemann). Donc, toujours par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum 2ne^{-n^2}$ converge ; d'où le résultat.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $1 \leq 1 + e^{-n^2} \leq 2$; et donc

$$\frac{2ne^{-n^2}}{2} \leq \frac{2ne^{-n^2}}{1+e^{-n^2}} \leq \frac{2ne^{-n^2}}{1} ;$$

c'est à dire

$$ne^{-n^2} \leq \frac{2ne^{-n^2}}{1+e^{-n^2}} \leq 2ne^{-n^2} .$$

2. Soit $f : x \mapsto 2xe^{-x^2}$.

(a) La fonction f est dérivable et, pour $x \geq 1$,

$$f'(x) = 2e^{-x^2} + (2x)(-2x)e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1-2x) .$$

Or, pour $x \geq 1$, $2e^{-x^2} > 0$ et $(1-2x) < 0$; donc $f'(x) < 0$.
Conclusion : f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

(b) Soit $k \geq 2$.
Comme la fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$, on a, pour $x \in [k, k+1]$, $f(x) \leq f(k)$. On en déduit que

$$\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{dx} \leq \int_k^{k+1} 2ke^{-k^2}\mathrm{dx} \ ;$$

c'est à dire

$$\int_k^{k+1} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \leq 2ke^{-k^2} \ .$$

De même en utilisant le fait que pour $x \in [k-1, k]$, $f(x) \geq f(k)$, on obtient

$$\int_{k-1}^{k} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \geq 2ke^{-k^2} \ .$$

Ainsi

$$\int_k^{k+1} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \leq 2ke^{-k^2} \leq \int_{k-1}^{k} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \ .$$

Soit alors $n \geq 2$.
On déduit de l'inégalité précédente que

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \leq \sum_{k=2}^{n} 2ke^{-k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \ ;$$

c'est à dire

$$\int_2^{n+1} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \leq \sum_{k=2}^{n} 2ke^{-k^2} \leq \int_1^{n} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \ .$$

(c) Pour $A > 1$,

$$\int_1^{A} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} = \left[-e^{-x^2}\right]_1^A = e^{-1} - e^{-A^2} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \ .$$

On a ainsi

$$\int_1^{+\infty} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} = e^{-1}.$$

Par le même raisonnement, on obtient

$$\int_2^{+\infty} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} = e^{-4}.$$

(d) En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue en 2.(b) (les trois suites convergent bien), on obtient

$$\int_2^{+\infty} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} 2ke^{-k^2} \leq \int_1^{+\infty} 2xe^{-x^2}\mathrm{dx} \ .$$

En appliquant le résultat de la question 2.(c), on obtient alors

$$e^{-4} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} 2ke^{-k^2} \leq e^{-1} \ .$$

En utilisant le résultat de la question 1.(c), on a par ailleurs

$$\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} 2ke^{-k^2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2ke^{-k^2}}{1+e^{-k^2}} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} 2ke^{-k^2} \ .$$

En combinant avec l'inégalité précédente, on a ainsi :

$$\frac{1}{2}e^{-4} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2ke^{-k^2}}{1+e^{-k^2}} \leq e^{-1} \ ;$$

puis

$$\frac{2e^{-1}}{1+e^{-1}} + \frac{1}{2}e^{-4} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2ke^{-k^2}}{1+e^{-k^2}} \leq \frac{2e^{-1}}{1+e^{-1}} + e^{-1} \ ;$$

ce qui est bien le résultat attendu.

Exercice 3 (facultatif)

1. (a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, on a, pour tout $t \in [1,x]$, $\dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{x}$.
On en déduit que , pour tout $t \in [1,x]$, $\dfrac{e^t}{t} \geq \dfrac{e^t}{x}$ (on a utilisé le fait que $e^t \geq 0$) ; et donc
$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_1^x \frac{e^t}{x}\,\mathrm{d}t\ ;$$
et donc
$$f(x) \;\geq\; \frac{1}{x}\int_1^x e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[e^t\right]_1^x = \frac{1}{x}\left(e^x - e\right)\ .$$
(b) On a, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e}{x} = +\infty$;
et donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
(c) La fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue.
Donc, en aplication du théorème fondamental du calcul intégral, f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et, pour x dans $[1,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\exp(x)}{x}$.
(d) La fonction f' est dérivable sur $[1,+\infty[$ donc f y est deux fois dérivable et on a, pour x dans cet intervalle :
$$f''(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$
. Le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $x-1$, donc positif sur $[1;+\infty[$.
On en conclut que f est convexe sur $[1;+\infty[$.
(e) La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = e(x-1)\ .$$

2. (a) La fonction g est dérivable car quotient de fonction dérivable et on a, pour $t \in [1,+\infty[$,
$$g'(t) = \frac{\exp(t)(3t^2) - \exp(t)t^3}{(t^3)^2} = \frac{t^2\exp(t)(3-t)}{t^6}$$
Ainsi g est décroissante sur $[1,3]$ et croissante sur $[3,+\infty[$.
(b) On déduit de la question précédente que si $t \in [1,3]$,
$g(3) \leq g(t) \leq g(1)$; et donc $0 \leq \dfrac{e^3}{27} \leq g(t) \leq e$.
On en déduit que
$$0 \leq \int_1^3 g(t)\mathrm{d}t \leq \int_1^3 e\ \mathrm{d}t \leq 2e\ .$$
(c) Soit x un réel supérieur ou égal à 3.
Comme g est croissante sur $[3;+\infty[$, on a, pour tout $t \in [3,x]$, $g(3) \leq g(t) \leq g(x)$; et donc $0 \leq \dfrac{e^3}{27} \leq g(t) \leq \dfrac{\exp(x)}{x^3}$.
On en déduit l'encadrement :
$$0 \leq \int_3^x g(t)\mathrm{d}t \leq \int_3^x \frac{\exp(x)}{x^3}\mathrm{d}t \;=\; \frac{x-3}{x^3}\exp(x)$$

3. (a) Pour $x \in [1;+\infty[$, on a
$$f(x) = \int_1^x u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t\ ;$$
avec $u(t) = \dfrac{1}{t}$; $u'(t) = \dfrac{-1}{t^2}$;
$v(t) = e^t$; $v'(t) = e^t$. On fait une intégration par parties :
$$f(x) = [u(t)v(t)]_1^x \;-\; \int_1^x u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t \;=\; \left[\frac{e^t}{t}\right]_1^x \;+\; \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\ \mathrm{d}t \;=\; \frac{\exp(x)}{x} - e + \int_1^x \frac{\exp(t)}{t^2}\mathrm{d}t\ .$$

(b) Soit $x \in [1;+\infty[$.
On fait une deuxième intégration par parties :

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\exp(t)\mathrm{dt} \;=\; \left[\frac{1}{t^2}\,e^t\right]_1^x \;-\; \int_1^x \frac{-2}{t^3}e^t \;\mathrm{dt} \;=\; \frac{\exp(x)}{x^2} - e + \int_1^x \frac{2\exp(t)}{t^3}\mathrm{dt}\ ;$$

ce qui donne, en utilisant le résultat de la question précédente, :

$$f(x) = \frac{\exp(x)}{x} + \frac{\exp(x)}{x^2} - 2e + 2\int_1^x g(t)\mathrm{dt}$$

4. (a) Soit $x \in [3,+\infty[$.
En utilisant les encadrements obtenus à la question 2., on obtient :

$$0 \leq \int_1^x g(t)\mathrm{dt} \leq 2e + \frac{x-3}{x^3}\exp(x)\ .$$

En utilisant le résultat de la question 3.(b), cela donne :

$$\frac{\exp(x)}{x} + \frac{\exp(x)}{x^2} - 2e \leq f(x) \leq \frac{\exp(x)}{x} + \frac{\exp(x)}{x^2} - 2e + 2\left(2e + \frac{x-3}{x^3}\exp(x)\right)\ ;$$

c'est à dire

$$\frac{\exp(x)}{x} + \frac{\exp(x)}{x^2} - 2e \leq f(x) \leq \frac{\exp(x)}{x} + \frac{\exp(x)}{x^2} + 2e + 2\frac{x-3}{x^3}\exp(x)\ .$$

(b) En divisant les termes de l'inégalité précédente par $\dfrac{\exp(x)}{x}$, on obtient :

$$1 + \frac{1}{x} - 2e\frac{x}{\exp(x)} \leq \frac{f(x)}{\dfrac{\exp(x)}{x}} \leq 1 + \frac{1}{x} + 2e\frac{x}{\exp(x)} + 2\frac{x-3}{x^2}\ .$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\exp(x)} = 0$ (croissances comparées) ;
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3}{x^2} = 0$ (car $\dfrac{x-3}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$).
Ainsi chacun des termes encadrant $f(x)$ dans l'inégalité précédente tend vers 1 quand $x \to +\infty$.
On en déduit, par encadrement , que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\dfrac{\exp(x)}{x}} = 1\ ;$$

et donc

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\exp(x)}{x}\ .$$