

THÈME : RÉVISIONS

sujet I
d'après Ecricome - sujet 0

Exercice 1. Dans tout le problème, p désigne un réel de $]0, 1[$.

On réalise une expérience aléatoire qui consiste à effectuer une suite de tests successifs $t_1, \dots, t_n, \dots$ sur un objet de la manière suivante :

- Le test t_1 est toujours effectué;
- Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, sachant que le test t_i a été effectué, soit l'expérience s'arrête alors avec une probabilité p , soit elle continue avec une probabilité $q = 1 - p$ et dans ce cas on réalise le test t_{i+1} .

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui modélise cette expérience et on note :

- N la variable aléatoire réelle égale au nombre total de tests effectués lors de l'expérience;
- Pour tout entier naturel i non nul, T_i la durée aléatoire du test t_i ;
- Pour tout entier naturel k non nul, $D_k = \sum_{i=1}^k T_i$;
- D la durée totale de l'expérience, en supposant que seules les durées des tests effectués sont comptabilisées.

On suppose enfin que, pour tout entier naturel i non nul, T_i suit la loi exponentielle de paramètre λ_i , et que cette durée est indépendante des durées des autres tests et de N .

Partie 1 - Loi de D_k

1. Montrer que pour tout entier naturel k non nul, D_k admet une espérance et donner une expression de celle-ci en fonction des λ_i où $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
2. Soit λ un réel strictement positif.
On suppose dans cette question uniquement que : $\forall i \in \mathbf{N}^*, \lambda_i = \lambda$. Déterminer une densité de D_k .
3. On ne suppose plus à présent que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ sont tous égaux. On définit par récurrence les fonctions f_k pour tout $k \geq 1$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f_{k+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} \int_0^x f_k(t) e^{\lambda_{k+1} t} dt & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, f_k est une densité de probabilité de D_k et que sa restriction à $\mathbf{R}_+$ est continue.
- b) Donner une expression sans intégrale de $f_2(x)$ pour tout réel x .
4. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
On suppose dans cette question que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ sont distincts 2 à 2. On définit pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ le réel $\ell_{i,k}$ et le polynôme L_i de $\mathbf{R}[x]$ par :

$$\ell_{i,k} = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (\lambda_i - \lambda_j)}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad L_i(x) = \ell_{i,k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (x - \lambda_j)$$

On note enfin P le polynôme défini par : $P = \sum_{i=1}^k L_i$.

- a) Montrer que P , P est le polynôme constant égal à 1.

- b) En déduire que $\sum_{i=1}^k \ell_{i,k} = 0$.
- c) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$:

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (-1)^{k-1} \lambda_1 \cdots \lambda_k \sum_{i=1}^k \ell_{i,k} e^{-\lambda_i x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Soit α un réel strictement positif.

On suppose dans cette question que, $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \alpha i$. Soit k un entier naturel non nul.

- a) Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\ell_{i,k} = \frac{(-1)^{k-i}}{(k-1)! \alpha^{k-1}} \binom{k-1}{i-1}$.
- b) En déduire que pour $x \geq 0$, $f_k(x) = k \alpha e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha x})^{k-1}$.
- c) Déterminer F_k la fonction de répartition de D_k .

Partie 2 - Loi et espérance de D

6. On suppose que l'on a défini la fonction Python `lamb(i)` qui prend en argument un entier i et qui renvoie la valeur de λ_i .

Compléter le script suivant pour qu'il affiche une valeur aléatoire qui suit la même loi que D :

Editeur

```
import numpy.random as rd

p = input("p = ")
i = 1 # numéro du test
D = rd.exponential(1 / lamb(1))
while rd.random() > .....:
    i = i + .....
    D = D + .....

print(D)
```

7. a) Donner la loi de N, et préciser son(ses) éventuel(s) paramètre(s).
- b) En déduire que :

$$\forall x \geq 0, \quad F_D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{k-1} F_k(x).$$

8. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$: $f_k(t) \leq \lambda_1$. *Indication : On pourra utiliser la définition de la fonction f_k à la question 3.*
- b) Montrer que pour tout réel t , la série $\sum_{k \geq 1} p q^{k-1} f_k(t)$ converge. Soit alors la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{k-1} f_k(t).$$

- c) On admet, que la restriction de f à $\mathbf{R}_+$ est continue. Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$0 \leq \int_0^x f(t) dt - \sum_{k=1}^n p q^{k-1} \int_0^x f_k(t) dt \leq q^n \lambda_1 x$$

- d) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ coïncide avec F_D sur $\mathbf{R}_+$.
- e) En déduire que f est une densité de probabilité de D.

9. Soit λ un réel strictement positif.

On suppose dans cette question uniquement que $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \lambda$.

En utilisant le résultat de la question 2, établir que D suit la loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.

10. Soit α un réel strictement positif.

On suppose dans cette question uniquement que $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \alpha i$.

- a) En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que la fonction de répartition de D , F_D est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{p}{p + qe^{-\alpha x}} (1 - e^{-\alpha x}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

- b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_D(x)) dx$ converge et vaut $-\frac{1}{\alpha q} \ln(p)$.
 c) En déduire que D admet une espérance et préciser sa valeur en fonction de p et α .

sujet II
adapté de Ecricome 2017

Exercice 2. Toutes les variables aléatoires présentes dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Partie A

Dans toute cette partie, a est un réel strictement positif et g_a est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Justifier que g_a est une densité de probabilité.
2. Soit Z_a une variable aléatoire admettant g_a pour densité.
 - a) Soit N une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et de variance a^2 . Rappeler une densité de N et donner les valeurs de $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{E}(N^2)$.
 - b) Montrer que Z_a admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(Z_a)$.
 - c) Montrer que Z_a admet une variance et calculer $\mathbf{V}(Z_a)$.

Partie B

Pour tout entier n strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée. On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Compléter la fonction python suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n :

Editeur

```
def tirage(n):
    urnes = np.zeros(n)
    X = 1
    choix = rd.randint(1, n + 1) # tirage uniforme dans {1, ..., n}
    while .... :
        urnes[choix - 1] += 1
        choix = rd.randint(1, n + 1)
        X = ....
    return X
```

2. On suppose dans cette question que $n = 1$.
Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
3. On suppose dans cette question que $n = 2$. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.
4. On se place ici dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.
 - a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.
 - b) Montrer que :

$$\forall k \in [2, n+1], \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

- c) Montrer que pour tout entier strictement positif n , X_n admet une espérance.
- d) On souhaite écrire une fonction python qui calcule $E(X_n)$ en fonction de n . Compléter la fonction suivante à cet effet :

Editeur

```
def esperance(n):
    facto = 1
    for i in range(1, n + 1):
        facto *= i

    fac = facto
    somme = 0
    puissance = n

    for k in range(2, n + 2):
        puissance = .....
        fac = .....
        somme = somme + k * (k - 1) / (puissance * fac)

    E = facto * somme
    return E
```

Partie C

On reprend dans cette partie les variables aléatoires X_n étudiées dans la partie B. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\alpha(n, m) = \sum_{k=0}^m \ln \left(1 - \frac{k}{n} \right)$$

- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$, $-x - x^2 \leq \ln(1 - x) \leq -x$.
- En déduire que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leq \frac{n}{2}$, on a :

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leq \alpha(n, m) \leq -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

- On suppose dans cette question que $x \leq 0$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} \mathbf{P}(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor))$.
- On suppose dans cette question que x est un réel $x > 0$.
 - Donner la limite puis un équivalent simple de $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - Justifier qu'il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \lfloor \sqrt{n}x \rfloor \leq \frac{n}{2}.$$

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{n} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n} \right)$.
- En déduire que pour tout $n \geq N$, on a :

$$\mathbf{P}(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) = \frac{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor - 1}{n} \exp(\alpha(n, \lfloor \sqrt{n}x \rfloor - 2)).$$

- Montrer alors que $\sqrt{n} \mathbf{P}(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Partie D

On admettra dans cette partie le résultat suivant : Si W est une variable aléatoire et si $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W_n admet une densité h_n ;
- la variable W admet une densité h ;

→ pour tout réel x , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = h(x)$;

alors, la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers W . On considère toujours dans cette partie la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies dans la partie B. On introduit une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$, que l'on suppose indépendante des variables aléatoires X_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$), et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \frac{X_n + U}{\sqrt{n}}$$

On définit enfin, pour tout entier strictement positif, la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{n} \mathbf{P}(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor).$$

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$.
Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor = k$.
b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est une densité de probabilité.
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\mathbf{P}(U \leq \sqrt{n}x - k)$.
On pourra séparer les cas où $k > \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$, $k < \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$ et $k = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$.
b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(Y_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt.$$

- c) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_n est une variable aléatoire à densité, et que Y_n admet f_n pour densité.
- d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y à densité dont on précisera la densité.
3. On admet l'énoncé du théorème de Slutsky :
Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ et si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une constante c , alors :
→ $(X_n + Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $X + c$;
→ $(X_n Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers cX .

Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

sujet III Révisions de sup

Exercice 3. ♦ Donner un équivalent simple de

$$\arctan(n) \frac{\sin\left(\frac{2}{\sqrt{4n+3}}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+3n}}\right)\right)^{666}}{(n/(n+1))^n \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - 1\right)}.$$

Problème 4. ♦♦♦

RAp1

A. Préliminaires

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{th}(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}.$$

1. Tracé sur le même repère, les courbes représentatives de ch et sh .
On précisera l'équation de la tangente à l'origine.
2. a) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(t)^2 - \operatorname{sh}(t)^2 = 1$.
b) Inversement, justifier que si $x, y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ vérifient $x^2 - y^2 = 1$ alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = \operatorname{ch}(t) \quad \text{et} \quad y = \operatorname{sh}(t).$$

(c'est la représentation paramétrique de l'hyperbole à l'instar des fonctions cosinus et sinus qui permettent de paramétrer le cercle).

B. Suite d'intégrales à paramètre

3. Justifier que th définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -1; 1[$. On note $\alpha = \text{th}^{-1}(1/2)$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^\alpha \text{th}(t)^n dt.$$

4. Préciser I_0 et I_1 , puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,
$$I_k = I_{k-2} - \frac{2^{-(k-1)}}{k-1}.$$
5. En déduire un programme python qui prend en argument n et renvoie I_n .

C. Équations différentielles et espaces vectoriels

On pose

$$W = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' - f = 0\}.$$

6. Justifier que W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
7. Vérifier que (ch, sh) est une famille libre de W .

L'objectif de la suite est de montrer que cette famille est aussi une famille génératrice de W . On propose deux preuves :

8. Preuve 1

Soit $f \in W$. On définit les fonctions g et h sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (f(x) + f'(x))e^{-x} \quad \text{et} \quad h(x) = (f(x) - f'(x))e^x.$$

- a) Préciser g' et h' , en déduire l'existence de deux réels A, B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

- b) Conclure en montrant que (ch, sh) est une base de W .

9. Preuve 2 (sujet A)

- a) Soit $g \in W$ telle que $g(0) = g'(0) = 0$.

- i) Soit $r \in \mathbb{R}_*^+$. Justifier qu'il existe $M_r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [-r; r], \quad |g(x)| \leq M_r, \quad |g'(x)| \leq M_r \quad \text{et} \quad |g''(x)| \leq M_r.$$

En déduire que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [-r; r]$, on a $|g^{(k)}(x)| \leq M_r$.

- ii) Montrer que g est nécessairement la fonction nulle.

- b) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on pose $h_{\lambda, \mu} = \lambda \text{ch} + \mu \text{sh}$. Justifier qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(0) = h_{\lambda, \mu}(0) \quad \text{et} \quad f'(0) = h_{\lambda, \mu}'(0).$$

- c) En déduire que $f = h_{\lambda, \mu}$.

10. Preuve 3 (sujet *)

- a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

- b) Soit $f \in W$. On pose $\alpha = f(0)$ et $\beta = f'(0)$.

- i) Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $f^{(k)}(0)$ en fonction de α et β .

- ii) Soit $r \in \mathbb{R}_*^+$. Justifier qu'il existe $M_r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [-r; r], \quad |f(x)| \leq M_r, \quad |f'(x)| \leq M_r \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M_r.$$

En déduire que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [-r; r]$, on a $|f^{(k)}(x)| \leq M_r$.

- iii) En déduire que $f = \alpha \text{ch} + \beta \text{sh}$.

D. Un peu de développements limités sur la fonction de Gudermann

- On définit la fonction gd sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{gd}(t) = \int_0^t \frac{du}{\text{ch } u}.$$

11. a) À l'aide du changement de variable $x = e^u$, justifier que gd admet une limite finie en $+\infty$ que l'on calculera.
 b) Que dire de la limite de gd en $-\infty$?
 c) Justifier que la fonction gd est une application bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser.
12. En utilisant un développement limité de $1/\text{ch}$ au voisinage de 0, donner le développement limité de $\text{gd}(t)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
13. a) Justifier que gd^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 en 0. On note

$$\text{gd}^{-1}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + o(t^3).$$

- b) Sans calcul superflu, que dire de a_0 et a_2 ?
 c) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions

$$t \mapsto (\text{gd}(t))^n, \quad \text{pour } n \in \llbracket 1, 3 \rrbracket.$$

- d) En remarquant que $\text{gd}^{-1}(\text{gd}(t)) = \sum_{k=0}^3 a_k (\text{gd}(t))^k + o(t^3)$, déterminer les réels a_1 et a_3 .

F. Réciproque sur la fonction de Gudermann

- Pour tout $t \in I =]-\pi/2; \pi/2[$, on pose

$$h(t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)} \right).$$

14. a) Préciser $h(0)$.
 b) Justifier que h est dérivable sur I et préciser $h'(t)$. En déduire que

$$\forall t \in I, \quad h(t) = \int_0^t \frac{du}{\cos(u)}.$$

15. Démontrer que h est une bijection de I dans $\mathbb{R}$.

16. a) Vérifier que pour tout $t \in I$, $h'(t) = \sqrt{1 + \tan(t)^2}$.
 b) Établir pour tous $x \in \mathbb{R}$, $t \in I$: $\text{sh}(h(t)) = \tan(t)$ et $\text{sh}(x) = \tan(h^{-1}(x))$.
 c) En déduire: $h'(t) = \text{ch}(h(t))$ et $(h^{-1})'(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)}$.

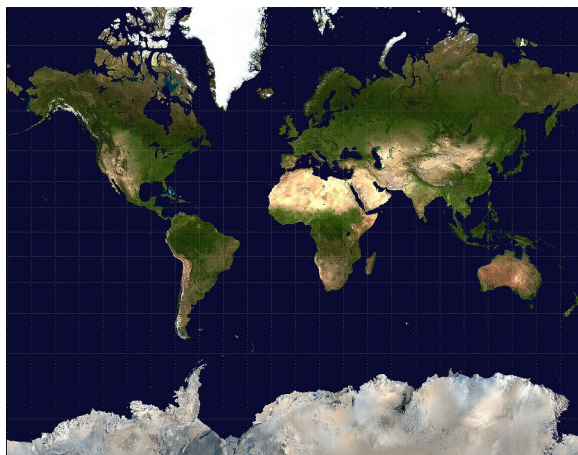
17. Conclure en prouvant: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{-1}(x) = \text{gd}(x) = \int_0^x \frac{du}{\text{ch}(u)}$.

- On a donc montré que l'égalité entre applications :

$$\left(x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \frac{du}{\text{ch}(u)} \right) = \left(x \in I \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\cos(t)} \right)^{-1}.$$

- Terminons par une remarque : La fonction de Gudermann sert à définir les coordonnées dans le plan de la projection cartographique dite Mercator d'un point de la sphère unité. La relation est

$$x = \text{longitude} \quad \text{et} \quad y = \text{gd}^{-1}(\text{latitude}).$$



F. Retour sur la partie B

- Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit φ l'application de E^2 définie par

$$\varphi : (g, h) \mapsto \int_0^1 (g(t)h(t) + g'(t)h'(t)) dt.$$

18. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
Soient les sous-espaces vectoriels $W = \{f \in E \mid f'' = 0\}$ et $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.
19. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux dans E .
20. Déterminer la projection orthogonale de $f \in E$ sur W .
21. Soit $f \in E$. Déterminer : $\inf_{g \in V} \left(\int_0^1 ((f(t) - g(t))^2 + (f'(t) - g'(t))^2) dt \right)$.
22. Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on définit $E_{\alpha, \beta} = \{h \in E \mid h(0) = \alpha \text{ et } h(1) = \beta\}$.
- Déterminer $g_0 \in W$ telle que $g_0(0) = \alpha$ et $g_0(1) = \beta$.
 - Vérifier que $h \in E_{\alpha, \beta}$ si et seulement si il existe $g \in V$ telle que $h = g + g_0$.
 - À l'aide de la question 5, en déduire que

$$\inf_{h \in E_{\alpha, \beta}} \left(\int_0^1 (h^2(t) + h'^2(t)) dt \right) = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{ch}(1) - 2\alpha\beta}{\operatorname{sh}(1)}.$$

sujet IV

Extrait d'un CB

Problème

Partie I : Un calcul d'intégrale

- Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale J_α converge où $J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$.
- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1 on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha.$$

En déduire que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1 on a : $J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha$.

- Calculer J_1 .
Pour n entier supérieur ou égal à 1, calculer J_n .

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$.

- Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel k_n tel que la fonction $f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité.
Exprimer k_n à l'aide de $J_{(n+1)/2}$. On pourra, en justifiant sa validité, utiliser le changement de variables $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, de densité f_n . On dira que X suit une *loi de Student* à n degrés de liberté.

- Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$ et la calculer dans ce cas.
- Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$, exprimer $V(X)$ en fonction de k_n , n et $J_{\frac{n-1}{2}}$ puis vérifier que

$$V(X) = \frac{n}{n-2}.$$

Lorsque $n = 1$ la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle loi de Cauchy et une densité sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}.$$

Partie III : Simulation d'une loi

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un rayon lumineux part de l'origine O et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = 1$, en un point M . On suppose que Θ , mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, est une variable aléatoire de loi uniforme sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$.

7. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\tan \Theta$. En déduire que $\tan \theta$ est une variable aléatoire à densité, dont on explicitera une densité.
8. Exprimer Y , variable aléatoire égale à l'ordonnée du point M , en fonction de Θ . Reconnaître la loi de Y .
9. On rappelle qu'en langage Python, dans la bibliothèque **numpy**, la commande **np.random.rand()** simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. On considère le programme informatique suivant :

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simu():
    u=rd.rand()
    x=np.tan(np.pi*u-np.pi/2)
    return x
```

Quelle loi de probabilité ce programme permet-il de simuler? Expliquer.

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, de fonction de répartition F . On notera G la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Y|$.
10. On suppose dans cette question que Y est une variable aléatoire de densité f continue sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Exprimer une densité de $-Y$ à l'aide de f et montrer que Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire.
 - (b) On suppose cette condition vérifiée. Exprimer G à l'aide de F et montrer que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité g de $|Y|$ en fonction de f .
 11. Inversement, on suppose dans cette question que $|Y|$ est une variable aléatoire de densité g , et que Y et $-Y$ ont la même loi.
 - (a) Montrer que, pour tout réel x , $\mathbf{P}([Y = x]) = 0$, puis exprimer $F(x)$ en fonction de $F(-x)$.
 - (b) Exprimer $F(x)$ en fonction de G et de x . (on pourra distinguer deux cas : $x < 0$ et $x \geq 0$).
 - (c) En déduire que Y est une variable à densité et exprimer une densité f de Y en fonction de g .
 12. Soit c un réel strictement positif. À l'aide du changement de variable $u = e^{2t}$, montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} \exp\left(-\frac{ce^{2t}}{2}\right) dt$$

converge et la calculer.

- Soient X et X' deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, de même densité φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

13. Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln|X|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$?

14. Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln \left| \frac{X}{X'} \right|$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}.$$

15. Déterminer une densité de la variable aléatoire $\left| \frac{X}{X'} \right|$ puis reconnaître la loi de $\frac{X}{X'}$.

Exercice 1

On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

16. Montrer que pour tout entier n , $u_n \geq \sqrt{n}$.
 17. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x).$$

(b) En déduire que pour tout entier n , $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$ puis que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

18. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0, puis en remarquant que, pour tout entier n non nul,

$$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}},$$

en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.

19. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$. À l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite L que l'on précisera.
 20. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \quad \text{puis} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1}).$$

Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n , si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}$.

Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

21. Écrire en langage Python une fonction qui prend en argument n et renvoie le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.

Exercice 2

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc "Pile" ou "Face" avec la probabilité $1/2$. On note P_k (resp F_k) l'événement : "on obtient Pile (resp Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer".

Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "Pile" puis "Face" dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "Pile" suivi de "Pile" aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), Y prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objet de l'exercice est de calculer les espérances de X et Y et de vérifier que, "contre toute attente", il n'y a pas égalité mais $\mathbf{E}(Y) > \mathbf{E}(X)$.

• Étude de X

22. Calculer $\mathbf{P}(X = 2)$.
 23. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que si le premier lancer est un "Pile", alors il faut et il suffit que $P_2 P_3 \dots P_{k-1} F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.
 (b) En déduire que :

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(X = k-1) + \frac{1}{2^k}.$$

24. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k \mathbf{P}(X = k)$. Déterminer u_k , puis donner la loi de X .
 25. Montrer que X a une espérance, notée $\mathbf{E}(X)$, et la calculer.

• **Étude de Y**

26. (a) Montrer que $(F_1, P_1 P_2, P_1 F_2)$ est un système complet d'événements.
 (b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4 :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(Y = k - 1) + \frac{1}{4} \mathbf{P}(Y = k - 2).$$

27. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $v_k = \mathbf{P}(Y = k)$.
 Déterminer v_2 et v_3 puis montrer qu'en posant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on a, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$v_k = \frac{1}{2} v_{k-1} + \frac{1}{4} v_{k-2}.$$

28. En déduire la suite $(v_k)_{k \geq 0}$ puis donner la loi de Y .
 29. Montrer que Y a une espérance, notée $\mathbf{E}(Y)$, et la calculer.

• **Simulation**

30. Proposer un programme qui simule les variables X et Y , puis calcule une valeur approchée des espérances.

Exercice 3

Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telles que la série de terme général a_n^2 converge. (Dans cet énoncé on emploie la notation a pour désigner la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels).

31. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
 32. Pour tout réel non nul α , on considère la suite $u(\alpha)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

Vérifier que les suites $u(\alpha)$ sont des éléments de E .

• **Un produit scalaire sur E**

33. Soit φ l'application définie sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(a, b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.

Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

On notera alors $\langle a, b \rangle = \varphi(a, b)$ et $\|\cdot\|_2$ la norme associée à φ .

• **Une famille orthonormale**

34. Montrer que pour toutes suites a et b de E ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2} \times \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2}.$$

35. Déterminer la norme des suites $u(\alpha)$, puis pour α et β deux réels distincts, $\langle u(\alpha), u(\beta) \rangle$.
 36. Déterminer une base orthogonale de l'espace vectoriel engendré par $u(-1)$, $u(1)$, et $u(2)$.

• **Supplémentaires orthogonaux, exemple**

Pour tout entier k non nul, on définit F_k l'ensemble des suites réelles a telles que

$$\forall n \geq k, \quad a_n = 0,$$

et G_k l'ensemble des suites réelles a de E telles que

$$\forall n \leq k-1, \quad a_n = 0.$$

37. Montrer que F_k est un sous espace vectoriel de E .
 38. Déterminer une base de F_k et donner la dimension de F_k .
 39. Montrer que G_k est un sous espace vectoriel de E . Que dire de la dimension ?
 40. Soit a une suite de E .
 Montrer que F_k et G_k sont des espaces supplémentaires orthogonaux au sens de φ .

– FIN –

Compléments

Bonus

Soit un entier $n \geq 2$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée.

On dit qu'une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive (resp. définie positive) si son spectre $\text{Sp}(A)$ est contenu dans $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$).

- On *admet* qu'une matrice A est positive (resp. définie positive) si et seulement si le produit scalaire $\langle Ax, x \rangle$ est positif pour tout x de $\mathbb{R}^n$ (resp. strictement positif pour tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).
- On *admet* également que si A est une matrice positive, alors $\langle Ax, x \rangle = 0$ si et seulement si $x \in \text{Ker}(A)$.

1. Soit $u = (u_1, u_2)$ un point de $\mathbb{R}^2$. On définit la fonction f_u sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f_u(x_1, x_2) = \|x - u\| = \sqrt{(x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2}.$$

- a) On note $\mathcal{O}_u$ l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{u\}$. Justifier que f_u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}_u$.
- b) Déterminer le gradient de f_u en tout point $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{O}_u$.
- c) Déterminer la matrice hessienne $\nabla^2(f_u)(x)$ en tout point x de $\mathcal{O}_u$.
 Montrer que $\nabla^2(f_u)(x)$ n'est pas inversible. Déterminer $\text{Sp}(\nabla^2(f_u)(x))$.
- d) Soit $x \in \mathcal{O}_u$. Montrer que $\nabla^2(f_u)(x)$ est positive et que $h = (h_1, h_2)$ appartient au noyau de $\nabla^2(f_u)(x)$ si et seulement si h appartient à la droite d'équation $(x_2 - u_2)y_1 = (x_1 - u_1)y_2$.

2. Soient a, b, c trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{O}$ l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x) = f_a(x) + f_b(x) + f_c(x)$.

- On *admet* que f admet un minimum global et on suppose dans toute la suite que ce minimum global n'est pas atteint en l'un des points a, b et c .

- a) Montrer que si $m = (m_1, m_2)$ est un point où ce minimum global est atteint, alors on a :

$$\frac{1}{f_a(m)}(m - a) + \frac{1}{f_b(m)}(m - b) + \frac{1}{f_c(m)}(m - c) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

- b) Prouver que la hessienne $\nabla^2(f)(x)$ est définie positive en tout point x de $\mathcal{O}$.
- c) Supposons que x et y sont deux points distincts où le minimum global est atteint.
 Pour $t \in [0, 1]$, on pose $g(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y-x))$. En utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme, montrer que g est constante. Vérifier que le segment de droite $[x, y] = \{(1-t)x + ty; t \in [0, 1]\}$ est contenu dans $\mathcal{O}$. Trouver alors une contradiction. Conclure.

