

Nom :

Mathématiques

Cours

double-diplôme
ESCP x CentraleSupélec

Livret III

Chapitre

3. Séries de Fourier

2026

Introduction aux séries de Fourier

Ce qui est le plus gratifiant, c'est l'effet eurêka, l'excitation de la découverte et le plaisir de comprendre quelque chose de nouveau, l'impression d'être au sommet d'une colline, et d'avoir une vue dégagée.

Maryam Mirzakhani (1977-2017), première femme lauréate de la médaille Fields.

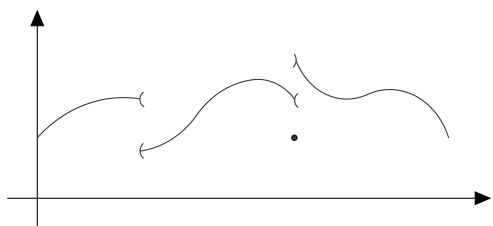
1 Préliminaires

1.1 Rappels

Définition 1 (Continue par morceaux sur un segment)

Soient $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i; a_{i+1}[$ admet un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i; a_{i+1}]$.



Exemples. • Toute fonction continue *sur un segment* est continue par morceaux.

- La fonction partie entière (restreinte à un segment) est une fonction continue par morceaux.
- Ci-contre, le graphe d'une fonction continue par morceaux.

Remarques.

- On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est continue sur tout segment de $\mathbb{R}$.
- De même, on définit la notion de fonction $\mathcal{C}^p$ par morceaux, on imposant le caractère $\mathcal{C}^p$ au lieu de seulement la continuité.

Proposition 2 (Intégration sur une période)

Si f est continue par morceaux et T -périodique, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt.$$

Remarques.

- Dans la suite, on prendra en général $T = 2\pi$, quitte à se ramener à ce cas. En effet, si f est T -périodique, alors la

fonction

$$g : t \mapsto f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) \quad \text{est } 2\pi\text{-périodique.}$$

• De plus, une fonction 2π -périodique est complètement déterminée par sa restriction à $[0, 2\pi]$. Soit $h = f|_{[0, 2\pi]}$, la restriction de f à h .

- Si h est continue par morceaux sur $[0; 2\pi]$, alors f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Si h est continue sur $[0; 2\pi]$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Si h est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $[0; 2\pi]$, alors f est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1.2 Structure préhilbertienne des fonctions continues 2π -périodiques

On considère l'espace vectoriel des fonctions 2π -périodiques continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{C}$. On le note :

$$\mathcal{C}_{2\pi, \text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

On définit sur cet espace l'application :

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad (\star)$$

On obtient une forme hermitienne positive mais non définie (prendre $\mathbf{1}_{\{0\}}$ par exemple pour nier le caractère défini). Par contre, pour obtenir un produit scalaire, on peut se restreindre à l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions 2π -périodiques continues à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3 (Une famille orthonormée de $\mathcal{C}_{2\pi, \text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$)

On définit pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction :

$$e_k : t \mapsto e^{ikt}.$$

La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{C}_{2\pi, \text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ relativement au produit scalaire défini par $(\star)$.

Proposition 4 (Une seconde famille o.n exprimée via sinus et cosinus)

La famille $(\mathbf{1}, t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(nt), t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(nt))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire défini par $(\star)$. De plus,

$$\|\cos(n \cdot)\|^2 = \|\sin(n \cdot)\|^2 = \frac{1}{2}.$$

1.3 Polynômes trigonométriques

Définition 5 (Polynôme trigonométrique)

Un **polynôme trigonométrique** est un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_{2\pi}$ engendré par la famille

$$(t \in \mathbb{R} \mapsto e^{ikt})_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Autrement dit, un polynôme trigonométrique s'écrit sous la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto P(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \quad \text{où } c_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarques.

• L'ensemble $\mathcal{T}_{n, 2\pi} = \text{Vect}(e^{ikt})_{|k| \leq n}$ est un espace vectoriel de dimension $2n+1$. Pour s'en convaincre, on peut exhiber un isomorphisme

$$P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mapsto (t \mapsto e^{-int} \cdot P(e^{it})) \in \mathcal{T}_{n, 2\pi}.$$

- On a l'égalité des sous-espaces vectoriels :

$$\text{Vect}(e^{ikt})_{k \in \mathbb{Z}} = \text{Vect}(1, \cos(nt), \sin(nt))_{n \in \mathbb{N}^*}$$

- On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad a_0 = 2c_0.$$

On en déduit :

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

- Le polynôme P est réel si et seulement si

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad (\text{équivalent à } a_k, b_k \in \mathbb{R}).$$

- Si $P_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$, alors, par orthogonalité de la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$\|P_n\|^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

2

Séries de Fourier

2.1

Définitions des coefficients de Fourier et premiers calculs

Définition 6 (Coefficients de Fourier)

Soit f une fonction 2π -périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On définit :

$$c_n(f) = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Règles de calculs

Proposition 7

Les applications suivantes sont linéaires :

$$f \mapsto \hat{f} = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}, \quad f \mapsto (a_n(f))_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad f \mapsto (b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Précisons quelques simplifications dans les calculs des coefficients en utilisant des arguments de symétries.

→ Si f est réelle, alors

$$c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}.$$

→ Si f est paire, alors

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(f) = 0.$$

→ Si f est impaire, alors

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad a_n(f) = 0.$$

→ Si $g(t) = f(-t)$, alors

$$c_n(g) = c_{-n}(f), \quad a_n(g) = a_n(f), \quad b_n(g) = -b_n(f).$$

→ Si $g(t) = f(t+a)$ où $a \in \mathbb{R}$, alors

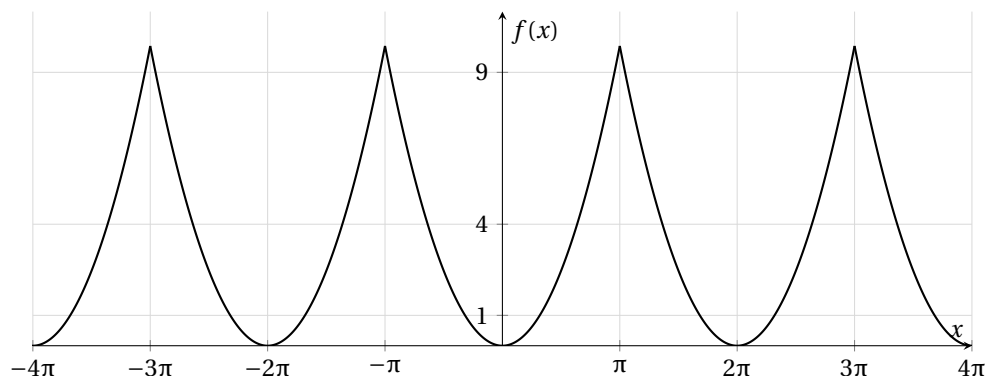
$$c_n(g) = e^{ina} c_n(f).$$

Exercice 1



◇ Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = x^2$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$.

ceF1



Proposition 8 (Lien avec la dérivée)

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi, \text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

- Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors

$$c_n(f') = in c_n(f).$$

- Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f).$$

2.2 Séries de Fourier et interprétation géométrique

Définition 9 (Série de Fourier)

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi, \text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On appelle **série de Fourier** de f la série de fonctions

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_n c_n(f) e^{int}.$$

La somme partielle d'ordre n est notée : $S_n(f) : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt}$.

On rappelle que $\mathcal{C}_{2\pi, \text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ a une structure préhilbertienne pour le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

De plus, pour $k \in \mathbb{Z}$, e_k désigne la fonction 2π -périodique $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{ikt}$. Dans ce cas,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \langle f, e_k \rangle.$$

Et $S_n(f)$ est alors le projeté orthogonal de f sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{T}_{2\pi, n}$. En effet, ce dernier admet $(e_k)_{k \in [-n; n]}$ comme base orthonormée, on sait alors que

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k = \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle e_k = p_{\mathcal{T}_{2\pi, n}}(f).$$

En reprenant le chapitre sur les espaces préhilbertiens, on peut retraduire l'inégalité de Bessel dans ce contexte :

Proposition 10 (Inégalité de Bessel)

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi, \text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{où} \quad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

On en déduit la convergence de la série $\sum |c_k(f)|^2$ (c'est le théorème de convergence monotone). En particulier, le terme général tend vers 0. Il vient :

Proposition 11 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi, \text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exercice 2

♦ Prouver cet énoncé par intégration par parties dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

ceF2

Remarque. Ce résultat s'inscrit dans un fait plus général (voir exercice 9) : plus la fonction est globalement régulière, plus les coefficients de Fourier décroissent rapidement.

3**Convergences des séries de Fourier**

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de fonctions définies sur un intervalle I . Il existe plusieurs manières de définir la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers une fonction f .

→ On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge simplement** vers une fonction f si

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

→ La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers une fonction f si à partir d'un certain rang n_0 les fonctions $f - f_n$ sont bornées pour tout $n \geq n_0$ et

$$\|f - f_n\|_{\infty} := \sup_{t \in I} |f(t) - f_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

→ La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge quadratiquement** vers une fonction f si à partir d'un certain rang n_0 les fonctions $f - f_n$ sont de carrée intégrable pour $n \geq n_0$ et

$$\|f - f_n\|_2 := \sqrt{\int_0^{2\pi} |f_n(t) - f(t)|^2 dt} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exercice 3

♦ **Lien entre les différents types de convergences**

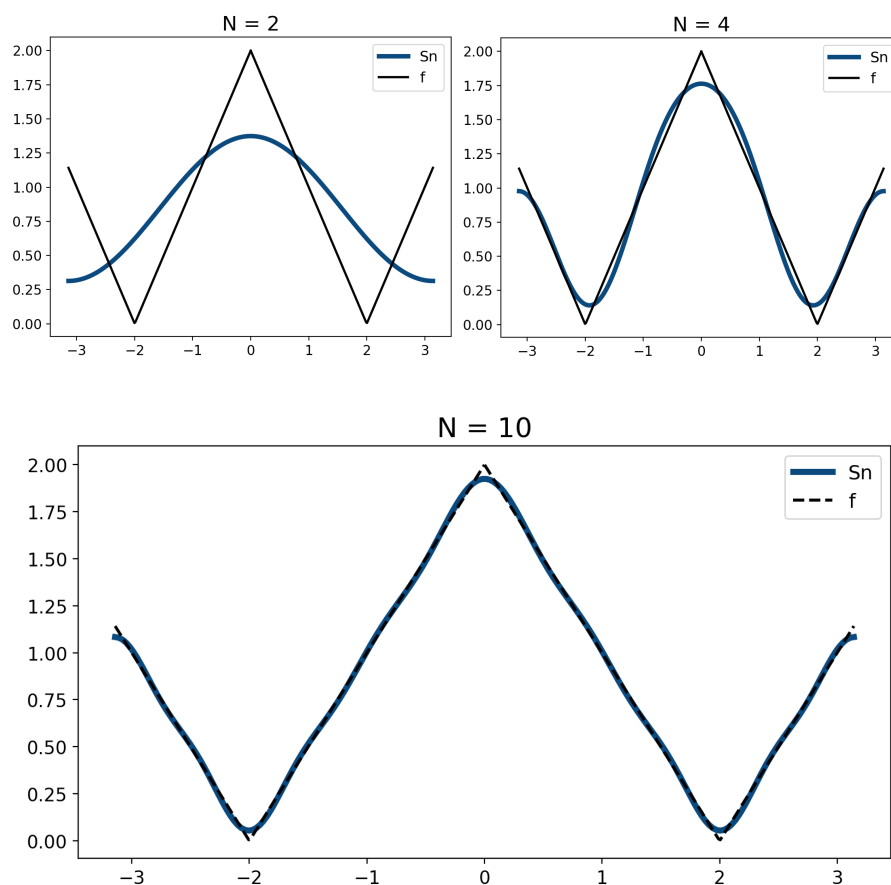
1. Justifier que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f alors elle converge aussi simplement vers f .
2. Justifier de plus que si I est un segment, la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f entraîne la convergence quadratique.

ceF3

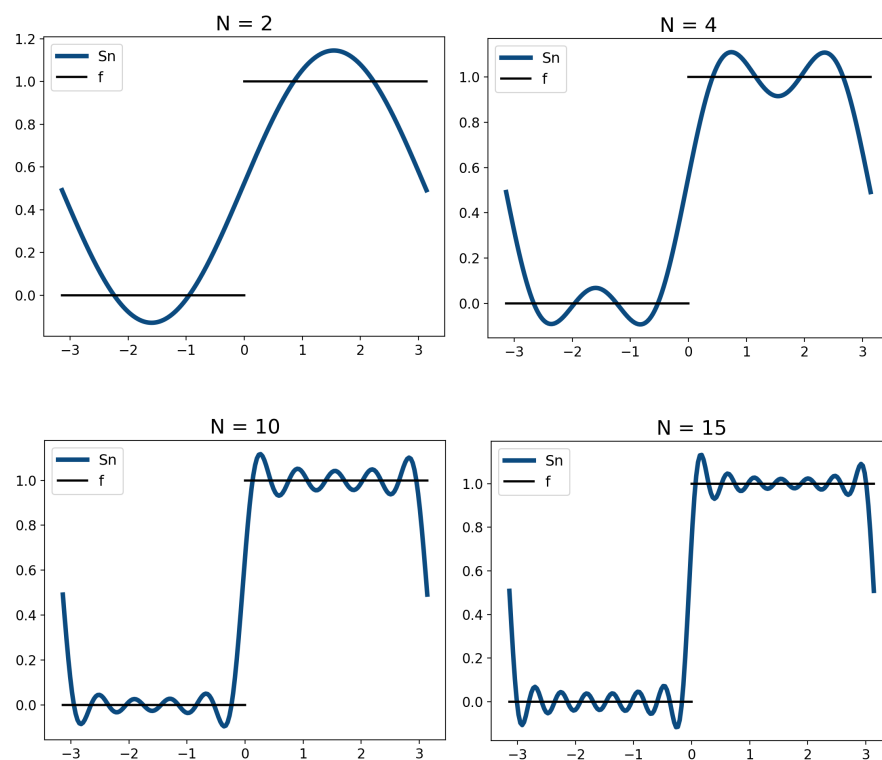
Remarque. La convergence uniforme conserve la continuité : si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f et chaque f_n est continue sur I , alors la fonction f est aussi continue sur I . Par contre, la convergence simple ne conserve pas la continuité.

3.1 Illustration de la convergence avec python

Dans la suite, on affiche le graphe de $S_N(f)$ pour la fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(t) = ||t| - 2|$.



Voir exercice 12 pour le code. Testons maintenant avec une fonction discontinue :



3.2 Convergences ponctuelle et uniforme

Théorème 12 (de Dirichlet)

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi, \text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors la série de Fourier de f converge simplement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

où $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$) désigne la limite à droite (resp. à gauche) de f en x .
En particulier, si f est continue en x , alors $S_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

Exemple. Reprenons la fonction de l'exercice 1, f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux : cette fonction est somme de sa série de Fourier pour tout réel, et on a donc, pour tout x dans $[-\pi, \pi]$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Si l'on fait $x = \pi$, on obtient : $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, d'où $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Proposition 13 (de Dirichlet uniforme)

Si f est continue, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f , c'est-à-dire

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(f)(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3.3 Convergence en moyenne quadratique

Théorème 14 (Égalité de Parseval)

Soit f continue par morceaux. Alors

$$\|f - S_n(f)\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Exercice 4



♦ Injectivité de la transformée de Fourier discrète

Justifier que l'application $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est injective. Est-elle surjective?

ceF4



Joseph Fourier 1768-1830



Exercices



Entraînements aux calculs

Exercice 5. ♦ Soient $a \in]0, \pi[$ et f la fonction 2π -périodique telle que pour tout $x \in [-\pi; \pi]$

ceF5

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-a; a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer les coefficients de Fourier de f , en déduire que :

$$\frac{\pi - a}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n}.$$

Exercice 6. ♦ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{it}$.

ceF6

1. Calculer les coefficients de Fourier de f .
2. Étudier la convergence de la série de Fourier.

3. Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{2\cos(t)} dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!2^n}$.

Exercice 7. ♦ **Calcul de coefficients de Fourier et applications**

ceF7

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π -périodique telle que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = |x|$.
2. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Compléments

Exercice 8. ♦ **Inégalité de Wirtinger**

ceF8

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

1. Justifier que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir égalité.

Exercice 9. ♦ **Régularité de la fonction et vitesse de décroissance**

ceF9

1. Justifier que si f est une fonction 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ alors : $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.
2. a) Soit f , une fonction 2π -périodique et α -höldérienne. C'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha.$$

$$\text{Justifier que pour tout } \beta < \alpha, \quad c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

b) *Facultatif.* Que dire de f si $\alpha > 1$?

Ces résultats ont des conséquences pratiques importantes pour la compression. Plus un signal est régulier, plus le nombre de coefficients de Fourier à transmettre est faible et donc la compression efficace.

Exercice 10. ♦♦♦ **Produit de convolution et théorème de Féjer**

ceF10

On définit leur produit de convolution deux fonctions continues f et g par

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt.$$

Dans toute la suite, $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, on note $e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ikx}$ et

$$S_n = \sum_{k=-n}^n e_k \quad \text{et} \quad C_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}.$$

1. Vérifier que $f \star S_n$ est un polynôme trigonométrique. Comment interpréter $f \star S_n$ avec le vocabulaire des séries de Fourier?
2. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_n(t) dt = 1.$$

- b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$:

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)} \quad \text{puis} \quad C_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2.$$

- c) Soient $\alpha \in]0, \pi]$ et $x \in [-\pi; \pi] \setminus [-\alpha; \alpha]$, en remarquant que $|\sin(x/2)| \geq |\sin(\alpha/2)|$, déterminer a_n , dépendant uniquement de α et n tels que

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha], \quad |C_n(x)| \leq a_n \quad \text{et} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dit autrement, (C_n) converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$.

3. a) Justifier que

$$|f \star C_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |u| \leq \pi} |f(x-u) - f(x)| C_n(u) du + \frac{1}{2\pi} \int_{|u| \leq \alpha} |f(x-u) - f(x)| C_n(u) du.$$

- b) Montrer que $(f \star C_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f \star C_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On admettra le théorème de Heine : Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x, y) \in [a; b]^2, \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Exercice 11. ♦ Théorèmes de Weierstrass

ceF11

L'exercice précédent a permis d'établir le *théorème de Weierstrass trigonométrique* :

→ Toute fonction continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

On se propose d'en déduire le théorème de Weierstrass sur un segment.

→ Toute fonction continue sur un segment $[a; b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Expliciter une fonction affine bijective φ de $[-\pi; \pi]$ dans $[a; b]$.
2. On définit la fonction $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(t) = f(\varphi(t)).$$

- a) Montrer que g est continue sur $[-\pi, \pi]$.

- b) Prolonger g en une fonction $\tilde{g}$ définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique, continue sur $\mathbb{R}$.

3. D'après le résultat admis, il existe donc une suite de polynômes trigonométriques $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |T_n(t) - \tilde{g}(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En déduire que

$$\sup_{x \in [a; b]} |T_n \circ \varphi^{-1}(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

4. Conclure sur l'existence d'une suite de polynôme $(P_n)_n$ telle que

$$\sup_{x \in [a; b]} |P_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

5. Application

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\int_a^b f(t) t^k dt = 0$.

- a) Démontrer que $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$.

- b) En déduire f .

6. Soit X , une variable aléatoire à densité dont une densité est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un segment $[a; b]$. Que dire de X si tous ses moments sont nuls?

Un peu de python

Exercice 12. ♦♦ Calculs approchés des coefficients de Fourier

ceF12

On admet la formule de Simpson¹ : pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{6} \left[P(\alpha) + 4P\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + P(\beta) \right].$$

Partant de ce constant, pour une fonction continue f , on approxime l'intégrale sur $[\alpha; \beta]$ par

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \simeq I(f, \alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{6} \left[f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right] \quad (\bullet)$$

Pour obtenir une meilleure approximation sur un segment $[a; b]$, on partitionne uniformément le segment $[a; b]$ en p sous-segments. Sur chacun sous-segment, on approxime l'intégrale à l'aide de la relation $(\bullet)$. Une approximation d'ordre p est alors donnée par²

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{k=0}^{p-1} I(f, a + kh, a + (k+1)h) \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{p}.$$

1. Compléter la fonction `Approx` qui prend en arguments un entier naturel non nul p , une fonction f , deux réels a, b et renvoie une approximation de $\int_a^b f(x) dx$ à l'aide du schéma décrit ci-dessus.

Editeur

```
def Approx( ... ):
    I=
    h=
    for k in ... :
        alpha= ...
        beta= ...
        I= ...
    return I
```

2. Modifier la fonction précédente pour obtenir une fonction python `an` qui prend en arguments un entier naturel n , une fonction f et renvoie une approximation de $a_n(f)$ (on pourra choisir $p = 20$).
3. En déduire une fonction python `aCoeff` qui prend en arguments un entier naturel N , une fonction f et renvoie une matrice ligne contenant une approximation de

$$[a_0(f) \quad a_1(f) \quad \dots \quad a_N(f)].$$

De même, on admet que l'on dispose d'une fonction `bCoeff` qui prend en arguments un entier naturel N , une fonction f et renvoie une matrice ligne contenant une approximation de $[0 \quad b_1(f) \quad \dots \quad b_N(f)]$.

4. Compléter le programme qui permet d'afficher $S_N(f)$ pour la fonction $f \in E$ définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(t) = |t| - 2$.

Editeur

```
def f(t):
    ...
    return ...

N=10 # un choix d'une valeur de N
x=np.linspace(-np.pi,np.pi,100)
A=aCoeff(f,N), B=bCoeff(f,N)
Y=np.zeros(100)
for i in range(0,100):
    Y[i]=A[0]/np.sqrt(2)
    for k in range(1,N+1):
        Y[i]= ...
plt.plot(x,Y,'r')
plt.plot(x,f(x),'b')
plt.show()
```

1. Mais on pourra la démontrer directement en posant $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.

2. On pourra noter l'analogie avec les sommes de Riemann.