

## DS 8 - CB sujet A

THÈMES : VARIABLES ALÉATOIRES, FONCTIONS PLUSIEURS VARIABLES, ALGÈBRE BILINÉAIRE  
concours blanc, épreuve A

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

### Problème I

Nouvelles notions de convergences d'une suite de variables aléatoires

On admettra le théorème suivant :

#### LEMME

de Cesàro

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels convergeant vers  $\ell \in \mathbb{R}$ , alors  $v_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ .

Dans ce problème, on désigne par  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé.

Toutes les variables aléatoires sont à valeurs réelles et définies sur  $\Omega$ .

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires et  $X$  une autre variable aléatoire. On dit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

- converge presque sûrement vers  $X$  si :  
il existe  $A \in \mathcal{A}$  avec  $\mathbf{P}(A) = 1$  tel que pour tout  $\omega \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ ;
- converge complètement vers  $X$  si :  
pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$  converge.

On remarquera que dans ces deux définitions, quitte à remplacer  $X_n$  par  $X_n - X$ , on peut se ramener au cas où  $X = 0$  (variable nulle), ce qu'on supposera par la suite. Le but du problème est d'étudier le lien entre la convergence presque sûre et la convergence complète de suites de variables aléatoires.

On démontrera dans la partie II, que la convergence complète entraîne la convergence presque sûre ce que l'on résume schématiquement par : convergence complète  $\Rightarrow$  convergence presque sûre. On pourra admettre cette implication pour traiter la partie I.

### Partie I - Exemples et contre-exemples

#### 1. • Loi de Bernoulli

Dans cette question 1, on se donne une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $]0; 1[$  et, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $X_n$  désigne une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p_n$ .

a) Justifier que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge complètement vers 0 si et seulement si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n$  converge.

b) On pose, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$A_n = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\} \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{n \geq 0} \left( \bigcap_{p \geq n} A_p \right).$$

i) Soit  $\omega \in \Omega$ . Montrer que  $\omega \in B$  si et seulement si  $X_n(\omega) = 0$  à partir d'un certain rang.

ii) En déduire que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend presque sûrement vers 0 si et seulement si  $\mathbf{P}(B) = 1$ .

## 2. • Minimum de lois exponentielles

Dans cette question 2, on désigne par  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, la variable  $X_n$  suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_n$ . Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on pose

$$M_n = \min_{0 \leq p \leq n} X_p.$$

- a) Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Expliciter  $\mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon)$  à l'aide des réels  $\lambda_i$ ,  $n$  et  $\varepsilon$ .
- b) Dans cette question, on suppose en plus qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n \geq \lambda$ . Montrer que la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge complètement vers la variable 0. Que peut-on dire sur la convergence en probabilité?
- c) Dans cette question, on suppose que  $\lambda_n = \ln((n+2)/(n+1))$ . Justifier que la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas complètement vers la variable 0.

## 3. • La convergence presque sûre n'entraîne pas la convergence complète

Dans cette question 3, on désigne par  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes avec  $X_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$X_n(\Omega) = \{0; n\}, \quad \mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

On définit alors  $Y_0$  la variable aléatoire nulle et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad Y_n = \frac{S_n}{n}.$$

→ Convergence presque sûre de  $(Y_n)_n$

- a) Justifier que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge complètement vers 0.

Pour la suite, on remarquera que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers 0 d'après un résultat admis.

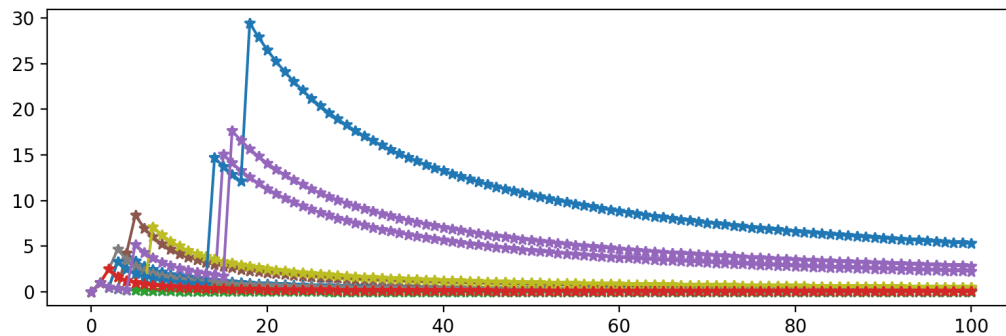
- b) Montrer que  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers 0.

→ Illustration avec python

- c) Écrire un programme python qui prend en argument  $n$  et simule  $X_n$ .
- d) En déduire un programme qui prend en argument  $N$  et renvoie une simulation du vecteur aléatoire

$$[Y_0 \quad Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_N].$$

On pourra commencer par donner une relation de récurrence simple entre  $Y_n$ ,  $Y_{n-1}$  et  $X_n$ .



Quelques trajectoires obtenues pour  $N = 100$ .

→ Convergence complète de  $(Y_n)_n$  ?

- e) Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_p = \prod_{j=p+1}^{2p} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right)$ . Montrer que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = 1$ .

Pour  $p$  et  $k$  entiers naturels non nuls, avec  $p+1 \leq k \leq 2p$ , on note  $A_k$  l'événement :

$$A_k = [X_k = k] \cap [X_{k+1} = 0] \cap [X_{k+2} = 0] \cap \dots \cap [X_{2p} = 0]$$

avec la convention  $A_{2p} = [X_{2p} = 2p]$ .

- f) Donner  $\mathbf{P}(A_{2p})$  et justifier que pour  $p+1 \leq k \leq 2p-1$ ,  $\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{k^2} \prod_{j=k+1}^{2p} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right)$ .

- g) Comparer les événements  $\bigcup_{k=p+1}^{2p} A_k$  et  $\left[Y_{2p} \geq \frac{1}{2}\right]$ . En déduire que  $\mathbf{P}\left(Y_{2p} \geq \frac{1}{2}\right) \geq \prod_{j=p+1}^{2p} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k^2}$ .
- h) En déduire que pour  $p$  assez grand,  $\mathbf{P}\left(|Y_{2p}| \geq \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{8p}$  et conclure que la suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  ne converge pas complètement vers 0.

## Partie II - Liens entre convergence presque sûre et convergence complète

Pour traiter cette partie, on admettra le théorème suivant :

### LEMME

de Borel-Cantelli

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements de l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . On pose  $E = \bigcap_{p \geq 0} \left( \bigcup_{q \geq p} A_q \right)$ .

- Si la série  $\sum_{q \geq 0} \mathbf{P}(A_q)$  converge alors  $\mathbf{P}(E) = 0$ .
- Si la série  $\sum_{q \geq 0} \mathbf{P}(A_q)$  diverge et si les événements  $A_n$  sont indépendants alors  $\mathbf{P}(E) = 1$ .

Dans cette partie on considère une suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### 4. • La convergence complète implique la convergence presque sûre

Dans cette question 4, on suppose que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge complètement vers la variable nulle. Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on pose

$$E_n = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{q \geq p} \left( |X_q| \geq \frac{1}{n} \right) \right).$$

- a) Montrer que l'ensemble  $B$  des  $\omega$  de  $\Omega$  tels que la suite  $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0 est exactement  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ .
- b) En déduire la convergence presque sûre de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### 5. • La convergence presque sûre implique la convergence complète dans le cas d'indépendance

Dans cette question 5, on suppose que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constituée de variables indépendantes et converge presque sûrement vers 0. Pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $A_n = [|X_n| \geq \varepsilon]$  et on suppose que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$  diverge.

- a) Montrer que l'événement  $F = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{q \geq p} A_q \right)$  est de probabilité 1.
- b) En déduire qu'il existe deux événements disjoints de probabilité 1. Conclure.

## Problème II

### Familles de polynômes orthogonaux appliqués à un problème de minimisation

Dans la suite, on désigne par  $n$  un nombre entier supérieur ou égal à 2 et par  $\mathbb{R}_n[x]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire lorsque son coefficient dominant (c'est à dire le coefficient de son terme de plus haut degré) est égal à 1.

L'objet du problème est l'étude des extrema d'une fonction de plusieurs variables (partie II). A cet effet, on étudie auparavant, dans la partie I, une famille de polynômes de  $\mathbb{R}_n[x]$ . Les deux premières parties ne sont pas indépendantes, mais on pourra admettre des résultats de la partie I pour pouvoir traiter la partie II. La partie III est indépendante de la partie II.

### PARTIE I

#### 1. • Définition d'un endomorphisme $\varphi$ de $\mathbb{R}_n[x]$

- a) Établir que l'application associant à tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[x]$  le polynôme  $\varphi(P)$  défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P)(x) = 2xP'(x) - P''(x)$$

où  $P'$  et  $P''$  désignent les dérivées première et seconde de  $P$ , est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

- b) Écrire sa matrice dans la base canonique  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$  de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

#### 2. • Éléments propres de l'endomorphisme $\varphi$

- a) Déterminer les valeurs propres  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $\varphi$  (on supposera que  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ) et montrer que  $\varphi$  est diagonalisable.  
 b) Montrer, pour tout nombre entier  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$ , qu'il existe un et un seul polynôme unitaire  $H_p$  de  $\mathbb{R}_n[x]$  vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_p''(x) - 2xH_p'(x) + 2pH_p(x) = 0.$$

- c) Montrer, pour tout nombre entier  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$ , que  $H_p$  est nécessairement de degré  $p$ .  
 d) Expliciter les polynômes  $H_0, H_1, H_2$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[x]$ .  
 e) Vérifier que les coefficients de  $x^{p-1}$  (avec  $1 \leq p \leq n$ ) et de  $x^{p-2}$  (avec  $2 \leq p \leq n$ ) dans l'expression du polynôme  $H_p$  valent :

$$h_{p-1} = 0 \quad \text{et} \quad h_{p-2} = -\frac{p(p-1)}{4}.$$

On admet pour la partie II le résultat suivant : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $H_n$  admet  $n$  racines distinctes dans  $\mathbb{R}$ . Ce résultat sera établi à la partie III.

## PARTIE II

On considère dans cette partie l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  constitué des  $n$ -uplets  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . On note  $U$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^n$  constitué des  $n$ -uplets  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  tels que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  (mais on ne demande pas de vérifier que cette partie  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est ouverte). On étudie ici les extrema de la fonction de plusieurs variables  $F$  définie sur l'ouvert  $U$  par :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(x_j - x_i).$$

Par exemple, pour  $n = 3$ , on obtient :  $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \ln(x_2 - x_1) - 2 \ln(x_3 - x_2) - 2 \ln(x_3 - x_1)$ .

### 3. • Étude du cas particulier $n = 2$

Dans ce cas

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \ln(x_2 - x_1).$$

- a) Représenter l'ensemble  $U$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ .  
 b) Calculer les deux dérivées partielles de  $F$  en tout point  $x = (x_1, x_2)$  de  $U$  et déterminer l'unique point critique  $a$  de  $U$ .  
 c) Calculer  $F(a)$  et montrer que  $F$  présente un minimum local en  $a$ .  
 d) Donner la matrice hessienne  $\nabla^2 F$  en tout point  $(x_1, x_2)$ . Est-ce que ce minimum est global?

### 4. • Étude du point critique de $F$ dans le cas général

On associe à tout point  $a = (a_1, \dots, a_n)$  de  $U$  le polynôme  $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ .

- a) Établir la relation suivante pour tout nombre réel  $x$  distinct de  $a_1, a_2, \dots, a_n$  :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - a_j}.$$

En déduire, pour tout indice  $i$ , l'expression de la limite quand  $x$  tend vers  $a_i$  de  $\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i}$  à l'aide d'une somme.

- b) Déterminer à l'aide de la formule de Taylor-Young (dont on demande de rappeler ici l'énoncé) le développement limité à l'ordre 2 en 0 des deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = tP'(a_i + t) - P(a_i + t) \quad ; \quad g(t) = tP(a_i + t).$$

En déduire une nouvelle expression de la limite quand  $x$  tend vers  $a_i$  de  $\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i}$  (on posera  $x = a_i + t$ ) à l'aide des réels  $P''(a_i)$  et  $P'(a_i)$ .

- c) Utiliser les résultats précédents pour établir l'égalité : 
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}$$
  
 d) Exprimer les  $n$  dérivées partielles de  $F$  en fonction de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , puis démontrer que si  $a$  est point critique de  $F$ , alors le polynôme défini par  $2xP'(x) - P''(x)$  admet pour racines  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .  
 e) En déduire qu'il existe un nombre réel  $\lambda$  tel que  $2xP'(x) - P''(x) = \lambda P(x)$ . Vérifier que  $\lambda = 2n$  puis  $P = H_n$ .  
 f) Établir que  $F$  admet un unique point critique  $a$  dans  $U$ .

### 5. • Nature du point critique de $F$ dans le cas général

- a) Montrer que l'ouvert  $U$  est convexe.  
 b) On rappelle qu'une fonction  $f$  définie sur l'ouvert  $U$  est convexe si :

$$\forall x, y \in U, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

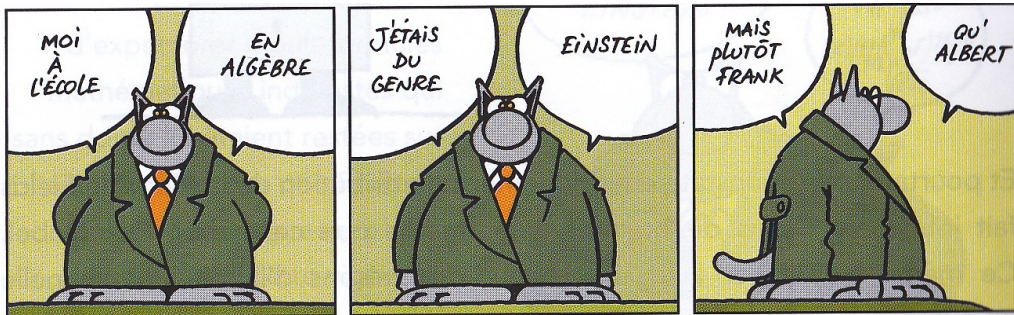
- i) Montrer que la fonction  $x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .  
En déduire que  $x \rightarrow x_i^2$  est convexe sur  $U$ .
- ii) Montrer que la fonction  $x \in ]0, +\infty[ \rightarrow -\ln(x) \in \mathbb{R}$  est convexe sur  $\mathbb{R}_*^+$ .  
En déduire que  $x \rightarrow -\ln(x_j - x_i)$  est convexe sur  $U$ .
- iii) Établir que la fonction  $F$  définie en début de partie est convexe sur  $U$ .
- c) On désigne par  $a$  le point critique de  $F$  et par  $x$  un élément de  $U$  et on pose pour  $0 \leq t \leq 1$  :

$$g_a(t) = F(tx + (1-t)a).$$

En utilisant les résultats sur les dérivées directionnelles, calculer la dérivée  $g'_a(t)$  et montrer que  $g'_a(0) = 0$ .

- d) Établir l'inégalité ci-dessous pour  $0 < t \leq 1$ , puis conclure que  $F$  admet un minimum en  $a$  :

$$\frac{g_a(t) - g_a(0)}{t} \leq F(x) - F(a).$$



### Partie III

#### 6. • Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$

- a) Montrer que l'intégrale écrite ci-dessous est définie pour tout couple  $(P, Q)$  de  $\mathbb{R}_n[x]$  :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x) \exp(-x^2) dx.$$

- b) Montrer alors que l'application  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \langle P, Q \rangle \in \mathbb{R}$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[x]$ .
- c) Exprimer la dérivée de  $x \in \mathbb{R} \mapsto P'(x) \cdot \exp(-x^2)$  en fonction de  $x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(P)(x) \cdot \exp(-x^2)$  puis prouver qu'on a pour tout couple  $(P, Q)$  de  $\mathbb{R}_n[x]$  :

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle.$$

Retrouver le fait que l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable.

- d) En déduire que  $\langle H_p, H_q \rangle = 0$  lorsque  $p$  et  $q$  sont deux nombres entiers distincts compris entre 0 et  $n$ , puis que  $(H_0, H_1, \dots, H_n)$  forme une base orthogonale pour ce produit scalaire. Montrer enfin que  $\langle H_p, Q \rangle = 0$  pour tout polynôme  $Q$  appartenant à  $\mathbb{R}_{p-1}[x]$  (où  $1 \leq p \leq n$ ).

#### 7. • Étude des racines des polynômes $H_p$ ( $1 \leq p \leq n$ )

- a) Montrer, en remarquant que  $\langle H_p, H_0 \rangle = 0$ , que le polynôme  $H_p$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$  en changeant de signe.
- b) On note  $a_1, a_2, \dots, a_m$  les racines distinctes de  $H_p$  en lesquelles celui-ci s'annule et change de signe (avec bien entendu  $m \leq p$ ) et on pose alors  $P_m(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$ .  
Étudier le signe du polynôme  $H_p P_m$  et déterminer la valeur de l'intégrale  $\langle H_p, P_m \rangle$  si  $m < p$ , puis en déduire que  $m = p$ .
- c) En déduire que le polynôme  $H_p$  admet  $p$  racines simples dans  $\mathbb{R}$ .

#### 8. • Relations entre les polynômes $(H_p)_{2 \leq p \leq n}$

- a) Prouver les égalités suivantes pour tout polynôme  $Q$  appartenant à  $\mathbb{R}_{p-3}[X]$  où  $3 \leq p \leq n$  :

$$\langle xH_{p-1}(x), Q(x) \rangle = 0 \quad ; \quad \langle H_p(x) - xH_{p-1}(x), Q(x) \rangle = 0.$$

En exprimant le polynôme  $H_p - xH_{p-1}$  dans la base  $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ , établir la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_p(x) - 2xH_{p-1}(x) + (p-1)H_{p-2}(x) = 0 \quad (\text{pour } 2 \leq p \leq n).$$

- b) Prouver l'égalité  $\langle H_p', Q \rangle = 0$  pour tout polynôme  $Q$  appartenant à  $\mathbb{R}_{p-2}[X]$  où  $2 \leq p \leq n$ , puis en déduire la relation :

$$H_p' = pH_{p-1} \quad (\text{pour } 1 \leq p \leq n).$$

– FIN DE L'ACTE I –

## DS 8 - solution

## Problème I

## Nouvelles notions de convergences

1.a) Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$ . Comme  $X_n(\Omega) = \{0; 1\}$ , on a pour  $\varepsilon \in ]0; 1]$

$$\mathbf{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p_n$$

et pour  $\varepsilon > 1$  :

$$\mathbf{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0.$$

On a bien convergence complète de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si et seulement si  $\sum p_n$  converge.

1.b) Soit  $\omega \in \Omega$ .

On a  $\omega \in B$  si et seulement s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\omega \in \bigcap_{p \geq n_0} A_p.$$

Autrement dit pour tout  $p \geq n_0$ ,  $X_n(\omega) = 0$ .

Pour un tel  $\omega$ , la suite  $(X_n(\omega))_n$  est donc constante égale à 0 à partir d'un certain rang. En particulier, la suite tend vers 0.

Dès lors

$$B \subset \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = 0 \right\}.$$

On a même égalité car  $X_n(\omega) \in \{0; 1\}$ . En effet, si la suite  $(X_n(\omega))_n$  converge vers 0, alors il existe un rang  $n_0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |X_n(\omega)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad X_n(\omega) = 0.$$

On a donc égalité dans l'inclusion précédente.

L'équivalence de l'énoncé s'en déduit alors. En effet :

Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend presque sûrement alors il existe  $A$ , événement certain avec

$$A \subset B \quad \text{d'où} \quad \mathbf{P}(B) = 1.$$

Si  $\mathbf{P}(B) = 1$ ,  $A = B$  permet de vérifier la définition de la convergence presque sûre.

2.a) On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) &= \mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) \\ &= \mathbf{P}(X_0 \geq \varepsilon, \dots, X_n \geq \varepsilon) \\ &= \prod_{i=0}^n \mathbf{P}(X_i \geq \varepsilon) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \prod_{i=0}^n \left( 1 - \left( 1 - e^{-\lambda_i \varepsilon} \right) \right) \\ \mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) &= \exp \left( -\varepsilon \sum_{i=0}^n \lambda_i \right). \end{aligned}$$

2.b) Dans ce cas, on a

$$0 \leq \mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) \leq \exp(-\lambda \varepsilon) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'après les croissances comparées. Par le critère de négligeabilité avec la série de Riemann absolument convergente  $\sum 1/n^2$ , on prouve la convergence de la série

$$\sum \mathbf{P}(|M_n - 0| \geq \varepsilon).$$

C'est la définition de la convergence complète.

En particulier, la convergence de la série implique la convergence du terme général vers 0 :

$$\mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

c'est la définition de la convergence en probabilité.

2.c) On a maintenant :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) &= \exp \left( -\varepsilon \sum_{i=0}^n \ln \left( \frac{i+2}{i+1} \right) \right) \\ &= \exp \left( -\varepsilon \sum_{i=0}^n \ln(i+2) - \ln(i+1) \right) \\ &= \exp(-\varepsilon \ln(n+2)) \\ \mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) &= \frac{1}{(n+2)^\varepsilon}. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon \in ]0; 1[$ , la série de Riemann

$$\sum \mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) \quad \text{diverge.}$$

Il n'y a pas de convergence complète.

3.a) Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$ . Pour tout  $n \geq \varepsilon$  (condition qui ne pose pas de difficulté si on ne regarde que la convergence lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) &= \mathbf{P}(X_n \geq \varepsilon) \\ &= \mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

À l'aide d'une série de Riemann, il y a bien convergence complète vers la variable nulle.

3.b) Comme  $(X_n)_n$  converge presque sûrement, il existe  $A$ , événement certain tel que

$$\forall \omega \in A, \quad X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'après le lemme de Cesàro

$$Y_n(\omega) = \frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ce qui conclut.

3.c)

```
def simuX(n):
    if n==0:
        return 0
    x=rd.random()
    if x<1/n**2:
        return n
    return 0
```

**3.d)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$nY_n = S_n = S_{n-1} + X_n = (n-1)Y_{n-1} + X_n.$$

$$\text{D'où} \quad Y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)Y_{n-1} + \frac{X_n}{n}.$$

On en déduit le code :

```
def simuY(N):
    Y=np.zeros(N+1)
    for n in range(1,N+1):
        Y[n]=(1-1/n)*Y[n-1]+simuX(n)/n
    return Y
```

**3.e)** On a pour  $p \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_p &= \prod_{j=p+1}^{2p} \left( \frac{j^2-1}{j^2} \right) \\ &= \prod_{j=p+1}^{2p} \frac{(j-1)(j+1)}{j^2} \\ &= \prod_{j=p+1}^{2p} \frac{j-1}{j} \cdot \prod_{j=p+1}^{2p} \frac{j+1}{j} \\ &= \frac{p}{2p} \cdot \frac{2p+1}{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$



On aurait pu aussi regarder  $\ln(u_p)$  et procéder par encadrement.

**3.f)** On a

$$\mathbf{P}(A_{2p}) = \mathbf{P}(X_{2p} = 2p) = \frac{1}{4p^2}$$

. Pour  $k \in \llbracket p+1; 2p-1 \rrbracket$ , on a avec l'indépendance des variables  $X_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_k) &= \prod_{i=k+1}^{2p} \mathbf{P}(X_i = 0) \cdot \mathbf{P}(X_k = k) \\ &= \left( \prod_{i=k+1}^{2p} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \right) \cdot \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

**3.g)** On a

$$\left\{ Y_{2p} \geq \frac{1}{2} \right\} \supset \bigcup_{k=p+1}^{2p} A_k.$$

En effet si un événement  $A_k$  est réalisé ( $\omega \in A_k$ ) alors

$$Y_{2p}(\omega) = \frac{S_{2p}(\omega)}{2p} \geq \frac{X_k(\omega)}{2p} \geq \frac{k}{2p} \geq \frac{p+1}{2p} \geq \frac{1}{2}$$

Par croissance de la probabilité

$$\mathbf{P}\left(Y_{2p} \geq \frac{1}{2}\right) \geq \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=p+1}^{2p} A_k\right) = \sum_{k=p+1}^{2p} \mathbf{P}(A_k)$$

car l'union est disjointe. De plus, on a

$$\left( \prod_{i=k+1}^{2p} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \right) \cdot \frac{1}{k^2} \geq \left( \prod_{i=p+1}^{2p} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

car on a rajouté des facteurs plus petits que 1. Le résultat s'en déduit.

**3.h)** Comme  $u_p \rightarrow 1$ , il existe un rang  $p_0$  tel que :

$$\forall p \geq p_0, \quad u_p \geq \frac{1}{2}.$$

De plus

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k^2} \geq \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{4p^2} = \frac{2p - (p+1) + 1}{4p^2} = \frac{1}{4p}$$

D'où le résultat.

Comme la série harmonique  $\sum 1/p$  diverge, la série

$$\sum \mathbf{P}(|Y_p - 0|) \text{ diverge.}$$

Il n'y a donc pas de convergence complète vers 0.

**4.a)** La définition de  $(X_n(\omega))_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  est

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |X_n(\omega)| \leq \varepsilon).$$

La négation est alors

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \quad \text{ET} \quad |X_n(\omega)| > \varepsilon.$$

Renommons les indices en prenant  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\varepsilon > 1/n$ ,

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N} \quad q \geq p \quad \text{ET} \quad |X_q(\omega)| \geq \frac{1}{n}$$

Soit :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N} \quad q \leq p \quad \text{ET} \quad \omega \in \left[ |X_q| \geq \frac{1}{n} \right]$$

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \omega \in \bigcup_{q \geq p} \left[ |X_q| \geq \frac{1}{n} \right]$$

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \omega \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{q \geq p} \left[ |X_q| \geq \frac{1}{n} \right] \right).$$

Ou encore :  $\exists n$  tel que  $\omega \in E_n, \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ .

Appliquons le lemme de Borel-Cantelli sachant que la converge complète donne la convergence de la série

$$\sum \mathbf{P}(A_q) = \sum \mathbf{P}\left(|X_q - 0| \geq \frac{1}{n}\right).$$

On a alors  $\mathbf{P}(E) = 0$ . Par passage au complémentaire

$$A = \bar{E} = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = 0 \right\}, \quad \mathbf{P}(A) = 1.$$

C'est la définition de la convergence presque sure.

**5.a)** D'après le deuxième point du lemme de Borel-Cantelli avec la divergence de la série  $\sum \mathbf{P}(A_q)$  et l'indépendance des  $(X_n)$  qui impose l'indépendance des événements  $(A_n)$ , on a bien  $\mathbf{P}(F) = 1$ .

**5.b)** Soit  $A$  tel que  $\mathbf{P}(A) = 1$  et pour tout  $\omega \in A$

$$X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Soit  $F$  défini précédemment, on a pour tout  $\omega \in F$

$$X_n(\omega) \not\rightarrow 0$$

et  $\mathbf{P}(F) = 1$ . En particulier  $A \cap F = \emptyset$  et par la formule du crible  $\mathbf{P}(A \cup F) = 2$ . L'hypothèse de la divergence de  $\sum \mathbf{P}(A_q)$  est absurde. La série  $\sum \mathbf{P}(A_q)$  converge. Dans ce cas, on retrouve la définition de la convergence complète de  $(X_n)_n$  vers 0.

## Problème II

### Familles de polynômes orthogonaux, minimisation

**1.a)•** Pour tout  $P$  de  $\mathbb{R}_n[x]$ , pour tout réel  $x$ ,

$$\varphi(P)(x) = 2xP'(x) - P''(x)$$

définit un polynôme.

Comme  $\deg P \leq n$  alors  $\deg 2xP' \leq n$  et  $\deg P'' \leq n-2$  donc

$$\deg \varphi(P) \leq n.$$

Ainsi  $\varphi$  est une application de  $\mathbb{R}_n[x]$  dans  $\mathbb{R}_n[x]$ .

• Pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= 2x((\lambda P + Q))' - (\lambda P + Q)'' \\ &= \lambda [2xP' - P''] + 2xQ' - Q'' \\ &= \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

et  $\varphi$  est linéaire.

En conclusion,  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

**1.b)** On a

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(x) = 2x$$

et pour tout  $k \geq 2$ , la dérivée première et seconde ne s'annulent plus et

$$\varphi(x^k) = 2kx^{k-1} - k(k-1)x^{k-2}$$

d'où les coordonnées de l'image et les colonnes de la matrice dans la base canonique

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 4 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 6 & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2n \end{bmatrix}.$$

**2.a)** La matrice de  $\varphi$  est triangulaire donc ses valeurs propres sont les termes de la diagonale.

$$\text{Sp}(\varphi) = \{0, 2, \dots, 2n\}.$$

L'endomorphisme  $\varphi$  a  $n+1$  valeurs propres distinctes et

$$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$$

donc  $\varphi$  est diagonalisable.

**2.b)** Pour tout nombre entier  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$ ,

$$\begin{aligned}0 = H_p'' - 2xH_p' + 2pH_p &\iff 0 = 2pH_p - \varphi(H_p) \\ &\iff \varphi(H_p) = 2pH_p \\ &\iff H_p \in E_{2p}(\varphi)\end{aligned}$$

où  $E_{2p}(\varphi)$  est le sous espace propre associé la valeur propre  $2p$ .

Or,  $\varphi$  ayant  $n+1$  valeurs propres distinctes dans  $\mathbb{R}_n[x]$  qui est de dimension  $n+1$ , chaque sous-espace propre est de dimension 1. Donc les polynômes de  $E_{2p}(\varphi)$  sont tous proportionnels, et leur coefficients dominant suivant la même proportionnalité, un et un seul a pour coefficient dominant 1. D'où la conclusion.

**2.c)** On regarde le degré des images :

→ Si  $\varphi(1) = 0 = 0 \times 1$  donc  $1 = H_0$  est cet unique polynôme unitaire associé à la valeur propre 0, et il est de degré 0.

→ Si  $H_p$  a pour terme dominant  $x^k$  (unitaire) comme  $\deg H_p'' < \deg H_p$  alors le terme dominant de  $\varphi(H_p) = 2xH_p' - H_p''$  est le terme dominant de  $2xH_p'$ , c'est-à-dire  $2kx^k$ . Et comme  $\varphi(H_p) = 2pH_p$ , il a aussi pour terme dominant,  $2px^k$ . D'où  $p = k$ . Ce qui conclut.

**2.d)** On a  $\varphi(1) = 0$  et 1 unitaire donc  $H_0 = 1$ . Ensuite,  $\varphi(x) = 2x$  avec  $x$  unitaire donc

$$H_1 = x.$$

Finalement, on pose  $H_2 = x^2 + ax + b$ , et

$$\begin{aligned}\varphi(x^2 + ax + b) &= 2x(2x + a) - 2 \\ &= 4x^2 + 2ax - 2 = 4\left(x^2 + \frac{a}{2}x - \frac{1}{2}\right) \\ &= 4(x^2 + ax + b).\end{aligned}$$

Si  $a = 0$  et  $b = -\frac{1}{2}$  donc

$$H_2 = x^2 - \frac{1}{2}.$$

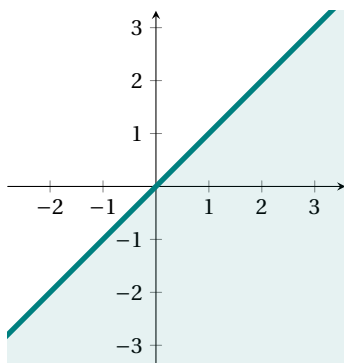
**2.e)** Posons  $H_p = x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + (x)R$  avec  $\deg(R) < p-2$ . L'équation de vecteur propre donne :

$$\begin{aligned}0 &= \varphi(H_p) - 2pH_p \\ &= 2x[p x^{p-1} + (p-1)a_{p-1}x^{p-2} + (p-2)a_{p-2}x^{p-3} + R'] \\ &\quad - p(p-1)x^{p-2} - 2p[x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + R] \\ &= [2(p-1) - 2p]h_{p-1}x^{p-1} \\ &\quad + [2(p-2)h_{p-2} - p(p-1) - 2ph_{p-2}]x^{p-2} + R_2\end{aligned}$$

avec  $\deg(R_2) < p-2$ . Par unicité des coefficients d'un polynôme, il vient

$$h_{p-1} = 0 \quad \text{et} \quad h_{p-2} = -\frac{p(p-1)}{4}.$$

**3.a)** La partie en blanc correspond à  $U$ . C'est un demi-plan (il faut aussi exclure la frontière).



### 3.b) Les fonctions

$$(x_1, x_2) \in U \mapsto x_1^2 + x_2^2 \quad \text{et} \quad (x_1, x_2) \in U \mapsto x_2 - x_1$$

sont polynomiales, donc de classe  $\mathcal{C}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_*^+$  (pour la seconde). Par composition avec la fonction logarithme de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$ , la fonction

$$(x_1, x_2) \in U \mapsto \ln(x_2 - x_1)$$

est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ . Par combinaison linéaire, la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $U$ .

La justification du caractère  $\mathcal{C}^2$  est souvent bâclée. Des rédactions du type «  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  par somme et composition » sont insuffisantes.

De plus,

$$\partial_1 F(x_1, x_2) = 2x_1 + \frac{2}{x_2 - x_1}$$

$$\text{et} \quad \partial_2 F(x_1, x_2) = 2x_2 - \frac{2}{x_2 - x_1}$$

Ensuite  $(x_1, x_2) \in U$  est point critique si et seulement si

$$\begin{cases} \partial_1 F(x_1, x_2) = 0 \\ \partial_2 F(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + \frac{2}{x_2 - x_1} = 0 \\ 2x_2 - \frac{2}{x_2 - x_1} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + \frac{2}{x_2 - x_1} = 0 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1^2 - 1 = 0 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$\iff (x_1, x_2) = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Et comme  $x_1 < x_2$ , la seule solution est

$$a = \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

### 3.c) On calcule :

$$\begin{aligned} F(a) &= x_1^2 + x_2^2 - 2 \ln(x_2 - x_1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \ln \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 1 - 2 \ln(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

et

$$F(a) = 1 - \ln(2).$$

La fonction  $F$  est  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $U$  et

$$\partial_{1,1}^2 F(x_1, x_2) = 2 + \frac{2}{(x_2 - x_1)^2}, \quad \partial_{2,2}^2 F(x_1, x_2) = 2 + \frac{2}{(x_2 - x_1)^2}$$

et par le théorème de Schwarz

$$\partial_{2,1}^2 F(x_1, x_2) = \partial_{1,2}^2 F(x_1, x_2) = \frac{-2}{(x_2 - x_1)^2}.$$

Et en  $a = \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  :

$$\partial_{1,1}^2 F(a) = 3, \quad \partial_{1,2}^2 F(a) = -1 \quad \text{et} \quad \partial_{2,2}^2 F(a) = 3.$$

La matrice hessienne en  $a$  est donc

$$H = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

On remarque que

$$H \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$H \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Donc  $H$  a deux valeurs propres strictement positives au point critique  $a$ , donc  $F$  a donc un minimum local en  $a$ .

### 3.d) À l'aide de la question 3.a), on peut affirmer que $U$ est une partie convexe.

Soit  $x = (x_1, x_2) \in U$ . En posant  $\alpha = 2/(x_2 - x_1)^2$ ,

$$\nabla^2 F(x) = \begin{bmatrix} 2 + \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 + \alpha \end{bmatrix} = 2I_n + \alpha J$$

où  $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Si on pose

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

on a

$$\nabla^2 F(x)X = \begin{bmatrix} 2(1 + \alpha) \\ 2(1 + \alpha) \end{bmatrix} = 2(1 + \alpha)X \quad \text{et} \quad \nabla^2 F(x)Y = 2Y.$$

On en déduit pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\text{Sp}(\nabla^2 F(x)) \subset \mathbb{R}_*^+.$$

On sait alors que tout point critique donne un minimum global.

### 4.a) Le polynôme $P$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$P'(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (x - a_j)$$

Il vient

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - a_j}$$

Puis

$$\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x - a_j} \xrightarrow{x \rightarrow a_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j}.$$

• Pour le calcul de la dérivée, on aurait pu aussi considérer  $x \mapsto \ln |P(x)|$ .

**4.b)** Pour une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$  contenant 0, quand  $t \rightarrow 0$  :

$$f(t) = f(0) + \frac{t}{1!} f'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + o(t^2).$$

• Dans le cas où

$$f(t) = tP'(a_i + t) - P(a_i + t)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} f'(t) &= P'(a_i + t) + tP''(a_i + t) - P'(a_i + t) \\ &= tP''(a_i + t) \\ f''(t) &= P''(a_i + t) + tP'''(a_i + t) \end{aligned}$$

et le développement devient

$$f(t) = \frac{t^2}{2} P''(a_i) + o(t^2).$$

• Dans le cas de

$$g(t) = tP(a_i + t),$$

on a

$$\begin{aligned} g'(t) &= P(a_i + t) + tP'(a_i + t) \\ g''(t) &= 2P'(a_i + t) + tP''(a_i + t) \end{aligned}$$

et le développement devient

$$g(t) = t^2 P'(a_i) + o(t^2)$$

• On a d'une part

$$\frac{f(t)}{g(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2 P''(a_i)}{2t^2 P'(a_i)} \rightarrow \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}.$$

D'autre part

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{tP'(a_i + t) - P(a_i + t)}{tP(a_i + t)} = \frac{P'(a_i + t)}{P(a_i + t)} - \frac{1}{t}.$$

Ainsi

$$\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i} \xrightarrow{x \rightarrow a_i} \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}.$$

**4.c)** On a démontré que

$$\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i} \xrightarrow{x \rightarrow a_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j}$$

et

$$\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i} \xrightarrow{x \rightarrow a_i} \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}.$$

Par unicité de la limite,

$$\frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j}.$$

**4.d)** Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(x_j - x_i) \\ &= x_k^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n x_i^2 - 2 \left( \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq k \text{ et } j \neq k}} \ln(x_j - x_i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq i < k-1} \ln(x_k - x_i) + \sum_{k < j \leq n} \ln(x_j - x_k) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\partial_k F(x) = 2x_k - 2 \left( \sum_{1 \leq i < k-1} \frac{1}{x_k - x_i} + \sum_{k < j \leq n} \frac{-1}{x_j - x_k} \right)$$

et

$$\partial_k F(x) = 2x_k - 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_i}.$$

Si  $a$  est point critique de  $F$  alors toutes ses dérivées partielles sont nulles en  $a$  :

Pour tout  $k$  :

$$2a_k - 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{a_k - a_i} = 0$$

avec

$$\frac{P''(a_{ik})}{2P'(a_k)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{a_k - a_i},$$

on a alors

$$2a_k - 2 \frac{P''(a_{ik})}{2P'(a_k)} = 0$$

et

$$P''(a_k) = 2a_k P'(a_k)$$

pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Donc  $2xP' - P''$  admet pour racines tous les  $a_k$ ,  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**4.e)** Comme  $\deg(P) = n \neq 0$  alors

$$\deg(2xP') = n \quad \text{et} \quad \deg(P'') < n$$

donc  $\deg(2xP' - P'') = n$ .

Et comme il a pour racines distinctes, les  $a_k$ , il est divisible par  $\prod_{k=1}^n (x - a_k) = P$ .

Donc, il existe  $Q \in \mathbb{R}[x]$  tel

$$2xP' - P'' = QP.$$

Et

$$\deg(QP) = \deg(Q) + \deg(P)$$

donc  $\deg(Q) = 0$  et  $Q$  est une constante. Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$2xP' - P'' = \lambda P$$

En étudiant le terme dominant, on constate que  $\lambda = 2n$  et  $2xP' - P'' = 2nP$  quand  $a$  est un point critique de  $F$ .

Dans la question 2.b), on a montré (avec  $p = n$ ) que  $H_n$  est l'unique polynôme unitaire de  $\mathbb{R}_n[x]$  vérifiant :

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0.$$

$P$  est un polynôme unitaire de  $\mathbb{R}_n[x]$  et il vérifie cette relation. Donc, quand  $a$  est un point critique de  $F$ ,  $P = H_n$ .

**4.f)** Si  $a$  est un point critique, pour tout  $k$ ,  $a_k$  est racine de  $P = H_n$ .

Or, on a vu que  $H_n$  a  $n$  racines simples (distinctes) et il n'y a qu'une unique façon de les placer en ordre strictement croissant. Ceci prouve l'unicité de  $a$ . Il reste à prouver

l'existence.

De plus, si  $a$  est choisit afin que ces coefficients correspondent aux racines de  $H_n$ , en reprenant la question 30, on constate que toutes les dérivées partielles de  $F$  sont nulles en  $a$ . Autrement dit,  $a$  est point critique. Finalement, l'unique point critique est  $a$ , le point dont les coordonnées sont les racines de  $H_n$  en ordre croissant.

**5.a)** Soient  $x$  et  $y \in U$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  :

$$x_i < x_{i+1} \quad \text{et} \quad y_i < y_{i+1},$$

avec  $t \geq 0$  et  $1-t \geq 0$  on a encore,

$$tx_i < tx_{i+1} \quad \text{et} \quad (1-t)y_i < (1-t)y_{i+1},$$

et donc

$$\lceil tx + (1-t)y \rceil_i < \lceil tx + (1-t)y \rceil_{i+1}.$$

Par définition,  $tx + (1-t)y \in U$  et  $U$  est convexe.

**5.b)** • Soit  $g : t \mapsto t^2$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et  $g''(t) = 2 \geq 0$  donc  $g$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f : x \mapsto x_i^2$ .

Soient  $x$  et  $y \in U$  et  $t \in [0, 1]$  alors  $tx + (1-t)y \in U$  et

$$f(tx + (1-t)y) = [tx_i + (1-t)y_i]^2$$

par définition de  $f$ . Or  $x_i$  et  $y_i \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 1]$  et que la fonction carrée est convexe sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} [tx_i + (1-t)y_i]^2 &\leq t[x_i]^2 + (1-t)[y_i]^2 \\ &\leq tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

Donc  $x \mapsto x_i^2$  est convexe sur  $U$ .

•  $g : x \mapsto -\ln(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$$g'(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$$

Donc  $g$  est convexe sur  $]0, +\infty[$ .

Soit  $h : x \mapsto -\ln(x_j - x_i)$  avec  $i < j$ .

Pour tous  $x$  et  $y$  de  $U$ , et  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} (tx + (1-t)y)_j - (tx + (1-t)y)_i \\ = t(x_j - x_i) + (1-t)(y_j - y_i) \end{aligned}$$

et  $x_j - x_i \in ]0, +\infty[$  ainsi que  $y_j - y_i$  donc, par convexité de  $g$  ci dessus :

$$\begin{aligned} g(t(x_j - x_i) + (1-t)(y_j - y_i)) \\ \leq tg(x_j - x_i) + (1-t)g(y_j - y_i) \end{aligned}$$

et donc

$$h(tx + (1-t)y) \leq th(x) + (1-t)h(y).$$

Donc  $x \mapsto -\ln(x_j - x_i)$  est convexe sur  $U$ .

• Pour tout  $x \in U$  :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} -\ln(x_j - x_i).$$

Or, une somme de fonctions convexes est convexe, donc d'après ce qui précède  $F$  est bien convexe sur  $U$ .

**5.c)** On a

$$g_a(t) = F(tx + (1-t)a) = F(a + t(x-a)).$$

On reconnaît l'expression de la fonction directionnelle en  $a$ .

On sait alors que  $g_a$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , avec

$$g'_a(t) = \langle \nabla F(a + t(x-a)), x-a \rangle.$$

Comme  $a$  est un point critique, on a la simplification

$$\nabla F(a) = 0 \quad \text{et} \quad g'_a(0) = 0.$$

**5.d)** Soit  $t \in ]0, 1[$ ,

$$g_a(t) - g_a(0) = F(tx + (1-t)a) - F(a).$$

Comme  $F$  est convexe sur  $U$ ,

$$F(tx + (1-t)a) \leq tF(x) + (1-t)F(a)$$

donc

$$g_a(t) - g_a(0) \leq tF(x) + (1-t)F(a) - F(a) = t(F(x) - F(a))$$

Et comme  $t > 0$ , on obtient l'inégalité :

$$\frac{g_a(t) - g_a(0)}{t} \leq F(x) - F(a)$$

• Par définition du nombre dérivé

$$\frac{g_a(t) - g_a(0)}{t-0} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} g'_a(0) = 0.$$

Donc par passage à la limite dans l'inégalité précédente

$$0 \leq F(x) - F(a)$$

c'est-à-dire

$$F(a) \leq F(x).$$

Ceci étant valable pour tout  $x \in U$ ,  $F$  admet un minimum sur  $U$  en  $a$ .

**6.a)** L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x) \exp(-x^2) dx$  est une intégrale d'une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est impropre en  $\pm\infty$ .

→ Étude en  $+\infty$

$$P(x)Q(x) \exp(-x^2) \times x^2 \sim ax^n \exp(-x^2) = a \frac{x^m}{\exp(x^2)}$$

avec  $ax^m$  le terme dominant de  $x^2PQ$  de l'expression, (en supposant  $PQ \neq 0$  sinon, l'intégrale converge). Or

$$\frac{x^m}{\exp(x^2)} = \frac{y^{m/2}}{\exp(y)}$$

avec  $y = x^2 \rightarrow +\infty$  et, par croissance comparée,  $P(x)Q(x) \exp(-x^2) \times x^2 \rightarrow 0$ . Donc

$$P(x)Q(x) \exp(-x^2) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et comme, l'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge, par le critère de négligeabilité, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} P(x)Q(x) \exp(-x^2) dx$$

converge absolument, donc converge.

→ Étude en  $-\infty$ .

Le changement de variable  $t = -x$  affine donne la même convergence en  $-\infty$ .

Concluons :  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x) \exp(-x^2) dx$  converge.

**6.b)** Vérifions les différentes conditions :

- $\langle, \rangle$  est symétrique

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[x], \quad \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle.$$

- Linéarité à gauche : pour tous  $P_1, P_2$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}_n[x]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\lambda P_1 + P_2](x) Q(x) \exp(-x^2) dx \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x) Q(x) \exp(-x^2) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(x) Q(x) \exp(-x^2) dx \\ &= \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle \end{aligned}$$

par linéarité d'intégrales convergentes.

Par symétrie,  $\langle, \rangle$  est bilinéaire.

- Positive.  $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x) \exp(-x^2) dx$  est une intégrale convergente de fonction positive avec les bornes croissantes, donc,

$$\langle P, P \rangle \geq 0.$$

- Définie. Et si  $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x) \exp(-x^2) dx = 0$  alors, on a une intégrale nulle de fonction continue et positive sur un intervalle non réduit à un point, nécessairement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P^2(x) \exp(-x^2) = 0$$

Il vient  $P = 0$  et  $\langle, \rangle$  est défini positif.

Finalement,  $\langle, \rangle$  est bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[x]$ .

**6.c)** La fonction  $f : x \mapsto P'(x) \exp(-x^2)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par produit et composition de fonctions dérivables

$$\begin{aligned} f'(x) &= P''(x) \exp(-x^2) - 2xP'(x) \exp(-x^2) \\ &= -\varphi(P)(x) \exp(-x^2) \end{aligned}$$

et on a donc une primitive de cette fonction.

Soient  $A, B \in \mathbb{R}$  avec  $A < B$ .

Dans l'intégrale partielle,  $\int_A^B \varphi(P)(t) Q(t) e^{-t^2} dt$ , on intègre par parties avec  $u$  et  $v$  sont  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} u'(t) &= \varphi(P)(t) e^{-t^2} : & u(t) &= -P'(t) \exp(-t^2) \\ v(t) &= Q(t) : & v'(t) &= Q'(t). \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_A^B \varphi(P)(t) Q(t) e^{-t^2} dt &= \left[ -P'(t) \exp(-t^2) Q(t) \right]_A^B \\ &\quad + \int_A^B P'(t) Q'(t) e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

et comme  $P'(t) Q(t)$  est fonction polynôme, on retrouve par les croissances comparées que

$$P'(A) Q(A) \exp(-A^2) \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} 0$$

de même que  $P'(B) Q(B) \exp(-B^2)$  lorsque  $B \rightarrow +\infty$ .

Donc, quand  $A \rightarrow -\infty$ , puis  $B \rightarrow +\infty$  :

$$\int_A^B \varphi(P)(t) Q(t) e^{-t^2} dt \xrightarrow{A \rightarrow -\infty, B \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t) Q'(t) e^{-t^2} dt.$$

C'est-à-dire

$$\langle P', Q' \rangle = \langle \varphi(P), Q \rangle$$

et en substituant  $P$  à  $Q$  et  $Q$  à  $P$  :  $\langle Q', P' \rangle = \langle \varphi(Q), P \rangle$  et par symétrie du produit scalaire. Finalement

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle.$$

- L'endomorphisme  $\varphi$  est donc un endomorphisme symétrique, il est donc diagonalisable (dans une base ortho-normée).

**6.d)** On sait que pour un endomorphisme symétrique, les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Donc, pour  $q \neq p$  :

$$\langle H_p, H_q \rangle = 0.$$

Ensuite,  $(H_0, H_1, \dots, H_n)$  forme une base (base de vecteurs propres) orthogonale pour ce produit scalaire.

Et comme  $\deg(H_k) = k$ , la famille  $(H_0, \dots, H_{p-1})$  est une famille libre de  $p$  vecteurs de  $\mathbb{R}_{p-1}[x]$  avec  $\dim(\mathbb{R}_{p-1}[x]) = p$ . Donc  $(H_0, \dots, H_{p-1})$  est une base de  $\mathbb{R}_{p-1}[x]$ .

Et comme  $H_p \perp H_k$  pour tout  $k$  de  $[[0, n-1]]$ , on a

$$H_p \in \mathbb{R}_{p-1}[x]^\perp.$$

Donc,  $H_p \perp Q$  et  $\langle H_p, Q \rangle = 0$  pour tout polynôme  $Q$  appartenant à  $\mathbb{R}_{p-1}[x]$ .

**7.a)**  $\langle H_p, H_0 \rangle = 0$  si  $p > 0$  donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) \cdot 1 e^{-t^2} dt = 0.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que  $H_p$  est de signe constant sur  $\mathbb{R}$ . Il est donc positif puisque (terme dominant  $x^p$ ),  $H_p$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

D'où, intégrale nulle d'une fonction continue et positive,  $H_p = 0$  sur  $\mathbb{R}$ . Absurde.

Donc  $H_p$  change de signe et, par le théorème des valeurs intermédiaire pour  $H_p$  continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $H_p$  s'annule au moins une fois.

Finalement,  $H_p$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$  en changeant de signe.

**7.b)**  $P_m$  change donc de signe aux mêmes points que  $H_p$ .  
Donc le produit est de signe constant.  
Et comme ils ont même signe en  $+\infty$  (polynôme unitaire) alors

$$P_m(x) \text{ et } H_p(x)$$

sont de même signe.

Donc le polynôme  $H_p P_m$  est de signe constant sur  $\mathbb{R}$  donc du signe du coefficient dominant : 1.

Raisonnons par l'absurde : si  $m < p$  alors  $P_m \in \mathbb{R}_{p-1}[x] \perp H_p$  donc  $\langle H_p, P_m \rangle = 0$ .

Or,  $H_p P_m$  est continue, positive et non identiquement nulle sur  $\mathbb{R}$  (degré  $p + m \geq 0$ ) donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) P_m(t) e^{-t^2} dt = \langle H_p, P_m \rangle$$

ne peut pas être nulle. Absurde.

Donc  $m \geq p$  et comme  $H_p$ , de degré  $p$ , a au plus  $p$  racines,  $m \leq p$  d'où  $m = p$ .

**7.c)** Le polynôme  $H_p$  admet  $p$  racines distinctes dans  $\mathbb{R}$ . Et comme son degré est  $p$ , la somme des ordres des racines est inférieur à  $p$ . Donc  $H_p$  ne peut pas avoir de racine multiple. Ce qui conclut.

**8.a)** Pour tout polynôme  $Q \in \mathbb{R}_{p-3}[x]$  où  $3 \leq p \leq n$  :

$$\begin{aligned} \langle xH_{p-1}, Q \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (xH_{p-1}Q)(t) e^{-t^2} dt \\ &= \langle H_{p-1}, xQ \rangle = 0 \end{aligned}$$

car  $xQ(x) \in \mathbb{R}_{(p-1)-1}[x] \perp H_{p-1}$  de même

$$\langle H_p, Q \rangle = 0$$

car  $Q \in \mathbb{R}_{p-3}[x] \subset \mathbb{R}_{p-1}[x] \perp H_p$  et donc (par linéarité à gauche du produit scalaire)

$$\langle H_p - xH_{p-1}, Q \rangle = 0.$$

On décompose comme indiqué dans la base  $(H_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ , il existe des réels  $\alpha_i$  tels que

$$2H_p - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = \sum_{i=0}^p \alpha_i H_i.$$

Ensuite, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} \alpha_k |H_k|^2 &= \left\langle \sum_{i=0}^p \alpha_i H_i, H_k \right\rangle \\ &= \langle 2H_p - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2}, H_k \rangle \\ &= 2\langle H_p - xH_{p-1}, H_k \rangle + (p-1)\langle H_{p-2}, H_k \rangle. \end{aligned}$$

On trouve :

→ 0 si  $k \leq p-3$  d'où  $\alpha_k = 0$  en substituant  $H_k$  à  $Q \in \mathbb{R}_{p-3}[x]$  et par orthogonalité de  $H_{p-2}$  et  $H_k$ .

→ 0 si  $k = p$ . Ainsi  $\alpha_k = 0$  car  $H_p$  et  $xH_{p-1}$  sont deux polynômes unitaires de degré  $p$  donc, dans leur différence, les termes dominants se simplifient et  $H_p - xH_{p-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \perp H_p$ .

On vient donc de montrer que

$$P = 2H_p - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2}$$

est uniquement combinaison linéaire des polynômes  $H_{p-2}$  et  $H_{p-1}$ .

À l'aide de la question 13, on peut expliciter certains coefficients :

$$H_p = x^p + 0 \cdot x^{p-1} - \frac{p(p-1)}{4} x^{p-2} + \dots$$

puis

$$xH_{p-1} = x^p + 0 \cdot x^{p-1} - \frac{(p-1)(p-2)}{4} x^{p-2} + \dots$$

et

$$H_{p-2} = x^{p-2} + \dots$$

Donc le coefficient devant  $x^{p-1}$  dans

$$P = 2H_p - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2}$$

est  $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$  et  $\deg(P) \leq n-2$  donc  $P \perp H_{p-1}$  et  $\alpha_{p-1} = 0$ . Ainsi,  $P$  n'est combinaison linéaire que de  $H_{p-2}$  et le coefficient devant  $x^{p-2}$  est :

$$-2 \frac{p(p-1)}{4} + 2 \frac{(p-1)(p-2)}{4} + p-1 = 0$$

donc  $\deg(P) < p-2$  et  $P \perp H_{p-2}$  et  $\alpha_{p-2} = 0$ .

Finalement  $P = 0$  et pour  $2 \leq p \leq n$

$$2H_p - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0.$$

**8.b)** On revient à la définition du produit scalaire en intégrant par parties comme précédemment. On a montré que

$$\langle P', Q' \rangle = \langle \varphi(P), Q \rangle$$

pour tous polynômes  $P$  et  $Q$ .

Soit  $R$  une primitive de  $Q$

$$\begin{aligned} \langle H'_p, Q \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} H'_p(t) Q(t) e^{-t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H'_p(t) R'(t) e^{-t^2} dt \\ &= \langle H'_p, R' \rangle \\ &= \langle H_p, \varphi(R) \rangle \end{aligned}$$

avec  $\deg(R) = \deg(Q) + 1 \leq p-1$  on a donc  $\deg(\varphi(R)) \leq p-1$ , et  $H_p \perp \mathbb{R}_{p-1}[X]$  donc  $H_p \perp \varphi(R)$  et

$$\langle H'_p, Q \rangle = 0$$

pour tout polynôme  $Q$  appartenant à  $\mathbb{R}_{p-2}[x]$  où  $2 \leq p \leq n$ . Autrement dit,

$$H'_p \in \mathbb{R}_{p-2}[x]^\perp.$$

De plus,  $H'_p$  et  $pH_{p-1}$  sont de même degré  $(p-1)$  et de mêmes coefficients dominants. Il y a donc une simplification

$$H'_p - pH_{p-1} \in \mathbb{R}_{p-2}[x].$$

On a aussi

$$H'_p, H_{p-1} \in \mathbb{R}_{p-2}[X]^\perp$$

Donc

$$H'_p - pH_{p-1} \in \mathbb{R}_{p-2}[x] \cap \mathbb{R}_{p-2}[x]^\perp = \{0\}$$

. Ce qui permet d'établir que

$$H'_p = pH_{p-1}$$

pour  $2 \leq p \leq n$ .

Relation qui s'étend au cas  $p = 1$ .

**C • Calcul du minimum F(a) de F dans le cas général**

On désigne par  $y_1, \dots, y_{n-1}$  les racines de  $H_{n-1}$  et par  $z_1, \dots, z_{n-2}$  les racines de  $H_{n-2}$  (pour  $n \geq 3$ ).

**a)** Établir à l'aide de la relation  $2H_n - 2xH_{n-1} + (n-1)H_{n-2} = 0$ , les relations :

$$\left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \left( \frac{n-1}{2} \right)^{n-1} \left| \prod_{i=1}^{n-2} H_{n-1}(z_i) \right| \quad ; \quad \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \frac{2^2 3^3 \dots (n-1)^{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

**b)** Établir que  $|H'_n(a_i)| = \left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_j - a_i) \right|$  et évaluer  $p_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$  en fonction de  $\prod_{i=1}^n H'_n(a_i)$ .

**c)** Établir à l'aide de la relation  $H'_n = nH_{n-1}$  l'égalité  $p_n^2 = n^n \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right|$ .  
En déduire  $p_n$  en fonction de  $n$ .

**d)** En remarquant que le polynôme  $H_n$  vérifie l'égalité suivante :

$$H_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = x^n - \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x^{n-1} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_1 a_2 \dots a_n,$$

$$\text{calculer les sommes } \sum_{1 \leq i \leq n} a_i, \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j, \text{ puis } \sum_{1 \leq i \leq n} a_i^2.$$

En déduire la valeur  $F(a)$  du minimum de  $F$  sur  $U$  et retrouver lorsque  $n = 2$  le résultat de la question 3.

**C.a)** En évaluant en la racine  $y_i$  la relation

$$2H_n - 2xH_{n-1} + (n-1)H_{n-2} = 0,$$

il vient

$$2H_n(y_i) - 2y_i H_{n-1}(y_i) + (n-1)H_{n-2}(y_i) = 0,$$

puis

$$H_n(y_i) = -\frac{n-1}{2} H_{n-2}(y_i).$$

Par produit,

$$\left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \left( \frac{n-1}{2} \right)^{n-1} \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_{n-2}(y_i) \right|.$$

Ensuite, sachant que  $H_{n-2}$  est unitaire et ses racines sont  $z_i$ , il vient

$$H_{n-2} = \prod_{k=1}^{n-2} (x - z_k)$$

et de même

$$H_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (x - y_k)$$

Il vient

$$H_{n-2}(y_i) = \prod_{k=1}^{n-2} (y_i - z_k)$$

et par produit

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_{n-2}(y_i) \right| &= \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} |y_i - z_k| \\ &= \prod_{k=1}^{n-2} \prod_{i=1}^{n-1} |z_k - y_i| \\ &= \prod_{k=1}^{n-2} |H_{n-1}(z_k)|. \end{aligned}$$

Ce qui établit bien

$$\left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \left( \frac{n-1}{2} \right)^{n-1} \left| \prod_{k=1}^{n-2} H_{n-1}(z_k) \right|.$$

La seconde égalité s'en déduit par récurrence sur  $n$ .

**C.b)** On a

$$H'_n = \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x - a_k)$$

puis

$$H'_n(a_i) = \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_i - a_k).$$

Et comme  $\prod_{k=1: k \neq j}^n (a_i - a_k) = 0$  si  $i \neq j$  (car l'indice  $i$  est alors parmi les indices de la somme) il ne reste que le terme d'indice  $j = i$  :

$$H'_n(a_i) = \prod_{k=1: k \neq i}^n (a_i - a_k)$$

donc en renommant  $k = j$

$$|H'_n(a_i)| = \left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_j - a_i) \right|.$$

On vérifie ensuite que

$$p_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = \sqrt{\left| \prod_{i=1}^n H'_n(a_i) \right|}$$

**C.c)** À l'aide de l'indication

$$\begin{aligned} p_n^2 &= \left| \prod_{i=1}^n H'_n(a_i) \right| \\ &= \left| \prod_{i=1}^n n H_{n-1}(a_i) \right| \\ &= n^n \left| \prod_{i=1}^n H_{n-1}(a_i) \right|. \end{aligned}$$

Et on revient, comme précédemment à la forme factorisée :

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=1}^n H_{n-1}(a_i) \right| &= \left| \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n-1} (a_i - y_j) \right| \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^n |y_j - a_i| \\ &= \left| \prod_{j=1}^{n-1} H_n(y_j) \right|. \end{aligned}$$

Finalement,

$$p_n^2 = n^n \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right|.$$

• Comme

$$\left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \frac{1}{2^{n(n-1)/2}} \prod_{k=2}^{n-1} k^k$$

et que  $p_n \geq 0$ , on obtient

$$p_n = \frac{n^{n/2}}{2^{n(n-1)/4}} \prod_{k=2}^{n-1} k^{k/2} = \frac{1}{2^{n(n-1)/4}} \prod_{k=2}^n k^{k/2}.$$

**C.d)** On a vu que

$$a_{p-1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{p-2} = -\frac{p(p-1)}{4}.$$

Or, les réels  $a_i$  sont aussi les racines et  $-\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$  est le coefficient d'indice  $n-1$  donc

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_i = 0$$

et  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$  est le coefficient d'indice  $n-2$ ,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = -\frac{n(n-1)}{4}.$$

Enfin, l'égalité

$$0 = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

donne

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Donc avec  $a$ , le point critique, qui est la liste ordonnée des racines de  $H_n$

$$\begin{aligned} F(a) &= \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(a_j - a_i) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \ln \left( \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right)^2 \right) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \ln(p_n^2) = \frac{n(n-1)}{2} - \ln \left( \frac{1}{2^{n(n-1)/2}} \prod_{k=2}^n k^k \right) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \ln(2) - \sum_{k=2}^n k \ln(k). \end{aligned}$$

Pour  $n=2$ , on retrouve

$$F(a) = 1 + \ln(2) - \sum_{k=2}^2 k \ln(k) = 1 - \ln(2).$$