

DS 9 - sujet B

THÈME : DE TOUT !

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice I

Suites et équivalents

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les intégrales :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} du.$$

1. Convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

a) Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; 1[, \quad \frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

- b) En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. Résultats intermédiaires.

a) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1}$.

b) Soit k un entier naturel non nul. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1} dx$.

c) On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{2x}$.

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 appliquée à la fonction f , montrer que

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad |e^x - e^{2x} + x| \leq \frac{3x^2}{2}.$$

3. Application.

a) En utilisant la question 2, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| v_n + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du \right| \leq \frac{3}{2n^2} \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u} du.$$

b) On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

Donner un équivalent de v_n puis un équivalent de $u_n - \frac{1}{2}$ en fonction de I .

Exercice II
Loi de Xenakis

Partie I : premières propriétés

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif. On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a]$. On pose $Z = |X - Y|$.

1. Étude de la variable Z

- a) Reconnaître la loi de $-Y$.
- b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

- a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z en fonction de G .
- b) En déduire que Z est à densité et qu'une densité de Z est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

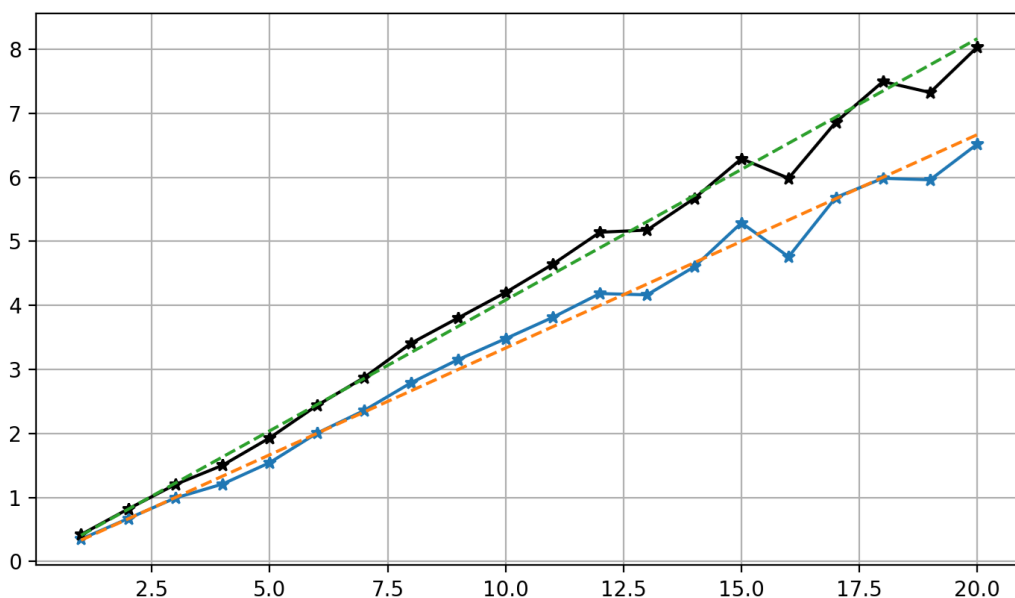
$$h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.
4. a) Écrire une fonction Python simulant la variable Z .
b) Vérifier que les résultats trouvés à la question précédente sont en accord avec le test suivant :

Editeur

```
a=np.linspace(1,20,20), m=400
E=np.zeros(20), F=np.zeros(20)
for i in range(20):
    e=0, f=0
    for j in range(m):
        s=simuZ(a[i])
        e+=s
        f+=s**2
    E[i]=e/m
    F[i]=np.sqrt((f/m))

plt.plot(a,E,'*-') # en bleu
plt.plot(a,F,'k*-') # en noir
plt.plot(a,1/3*a) # en vert
plt.plot(a,(1/6)**(1/2)*a) # en orange
plt.show()
```



Partie II : Étude d'un maximum

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que Z . On pose

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad N_n = \frac{a - M_n}{a/\sqrt{n}}.$$

5. Loi de Rayleigh et convergence en loi

Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$, on définit la fonction f_σ sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Vérifier que f_σ est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Rayleigh (noté $X \hookrightarrow \mathcal{R}(\sigma)$) si X est à densité et f_σ est une densité.

b) Donner $E(X)$ si $X \hookrightarrow \mathcal{R}(\sigma)$.

c) On suppose dans cette question seulement que $a = 1$. Justifier que la suite de variable $(N_n)_n$ converge en loi vers une variable suivant une loi de Rayleigh (on précisera le paramètre).

d) Que dire de la convergence de $(N_n)_n$ pour $a \in \mathbb{R}_*^+$?

6. Espérance exacte de M_n

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M_n a une espérance et : $E(M_n) = \int_0^a \mathbf{P}(M_n \geq x) dx$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter $I_n = \int_0^a H(x)^n dx$ à l'aide d'une somme.

On pourra commencer par le changement de variable $v = 1 - x/a$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(M_n) = a - a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \quad (*)$

7. Python

a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice carrée $A_n = (a_{ij}^n) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par : $a_{ij}^n = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Compléter le programme suivant qui prend en argument n et renvoie la matrice A_n :

Editeur

```
def binomAn(n):
    matrice = np.zeros([n+1,n+1])
    for i in range(n+1):
        matrice[i, 0] = ....           # Premier élément de chaque ligne    L1
        matrice[i, i] = ....           # Diagonale principale                L2

        for j in range(1, ....):       #                                     L3
            matrice[i, j] = ....       #                                     L4
    return matrice
```

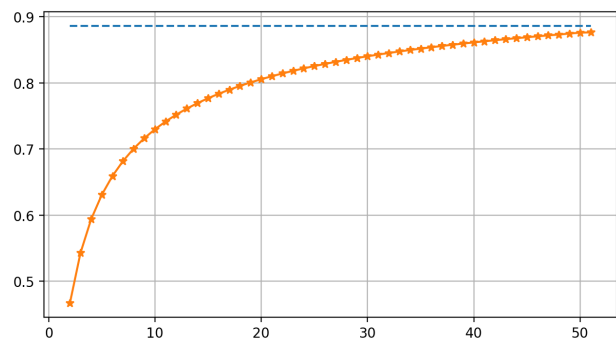
b) Dans la suite, on prend $a = 1$.

Donner une fonction python qui prend en argument n et renvoie $E(M_n)$ en utilisant la relation (*).

c) Commenter le programme suivant :

Editeur

```
N=50
EM=np.zeros(N)
for n in range(2,N+2):
    EM[n-2]=esperance(n)
plt.grid()
sigma=1/(2)**(1/2)
l=sigma*(np.pi/2)**(1/2)
n=np.arange(2,N+2)
plt.plot(n,l*np.ones(N),'--')
plt.plot(n,EM,'*-')
plt.show()
```



Bonus Iannis Xenakis (1922-2001) d'origine grecque, naturalisé français a utilisé cette loi dite maintenant de Xenakis. Mais ce dernier était :

I. Mathématicien (bien évidemment), II. Compositeur de musique, III. Architecte ou IV. Ingénieur.

Problème I
Fonctions de Lambert et applications

Partie A : Les fonctions V et W

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. Pour cela, on commence par considérer l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto xe^x. \end{cases}$$

• **La fonction W**

1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, +\infty[$.
Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W .
2. Justifier que W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -e^{-1}, +\infty[$.
3.
 - a) Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
 - b) En déduire un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$ ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
4.
 - a) Pour quelles valeurs du paramètre réel α l'intégrale $\int_0^1 x^\alpha W(x) dx$ est-elle convergente?
 - b) Pour quelles valeurs du paramètre réel α l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha W(x) dx$ est-elle convergente?

• **La fonction V**

5. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $] -\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, 0[$.
Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V .

• **Nombre de solution**

6. Pour un paramètre réel m , on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$xe^x = m \quad (\bullet).$$

Déterminer, en fonction de m , le nombre de solutions de $(\bullet)$. Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W .
On pourra s'appuyer sur le graphe de f .

7. Pour un paramètre réel m , on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$xe^x \leq m \quad (\bullet\bullet)$$

En utilisant les fonctions V et W , déterminer, suivant les valeurs de m , les solutions de $(\bullet\bullet)$.

8. Pour des paramètres réels non nuls a et b , on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ax} + bx = 0 \quad (\star)$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b , le nombre de solutions de $(\star)$. Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W .

Partie B : Une application en probabilité

Pour fidéliser sa clientèle, un commerçant organise une tombola permettant de gagner différents lots. Chaque client qui entre dans le magasin tire un billet de tombola. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose que les tirages sont indépendants et on admet que le nombre N de billets distribués aux clients au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X le nombre de billets gagnants tirés au cours d'une journée et on admet que X est également une variable aléatoire.

Pour que l'opération soit rentable, le commerçant souhaite que la probabilité de gagner au moins deux lots durant la même journée soit faible. On considère donc un réel $\alpha \in]0, 1[$ et on souhaite réaliser la condition

$$\mathbf{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \quad (\star)$$

Cependant, pour que l'opération intéresse les clients, le commerçant souhaite également que p soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition $(\star)$.

9. Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp . Donner l'espérance et la variance de X .
 10. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $p \leq 2 \frac{1-\alpha}{\lambda}$, alors la condition $(\star)$ est satisfaite.
 11. On pose $x = -(\lambda p + 1)$. Démontrer que la condition $(\star)$ est équivalente à la condition

$$xe^x \leq -\alpha e^{-1}$$

12. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie I), discuter selon la position de λ par rapport à $-1 - V(-\alpha e^{-1})$ l'existence d'un plus grand réel $p \in]0, 1[$ satisfaisant la condition $(\star)$.

Partie C : Approximation de W

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n \geq 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie I. Pour tout réel positif x , on considère la fonction φ_x définie par

$$\varphi_x : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x \exp(-x \exp(-t)). \end{cases}$$

et on définit, sur $\mathbb{R}^+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n \geq 0}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \varphi_x(w_n(x)). \end{cases}$$

13. Démontrer que, pour tout réel positif x , $W(x)$ est un point fixe de φ_x , c'est-à-dire une solution de l'équation $\varphi_x(t) = t$.
 14. Démontrer que, pour tout réel positif x , la fonction φ_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \varphi'_x(t) \leq \frac{x}{e}.$$

15. En déduire que

$$\forall x \in [0, e], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)|.$$

16. Proposer un programme python qui prend en argument un réel $x \in [0; e[$ et renvoie une approximation de $W(x)$.

Problème II

Diagonalisation d'une matrice tri-diagonale

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \forall Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

- A_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient à la i -ème ligne et j -ème colonne est $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Par exemple,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Partie I : Détermination des valeurs propres de A_n .

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A_3 .
2. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On désigne par S_θ l'ensemble des suites réelles $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel k ,

$$s_{k+2} - 2 \cos(\theta) s_{k+1} + s_k = 0.$$

Montrer que, si la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à S_θ , alors pour tout entier naturel k :

$$s_k = s_1 \frac{\sin(k\theta)}{\sin \theta}.$$

En déduire que S_θ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, engendré par la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \frac{\sin(k\theta)}{\sin \theta}.$$

3. Soit λ une valeur propre réelle de A_n , et soit $X_n = {}^t[x_1 \ \cdots \ x_n]$ un vecteur propre associé à λ .
On note m le plus grand des réels $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$.

a) Montrer que :

- $\lambda x_1 = x_2$;
- $\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \quad \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$
- $\lambda x_n = x_{n-1}$.

En déduire que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|\lambda| |x_k| \leq 2m, \quad \text{puis que } |\lambda| \leq 2.$$

b) On suppose que $|\lambda| < 2$. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2 \cos \theta$.

c) Montrer que la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ vérifie :

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, & s_k = x_k \\ s_{n+1} = 0 \end{cases}$$

d) En déduire qu'il existe un entier p de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$.

Pour tout entier p de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

$$\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}, \quad \lambda_p = 2 \cos \theta_p \quad \text{et} \quad X_p = {}^t[\sin \theta_p \ \sin 2\theta_p \ \cdots \ \sin n\theta_p].$$

4. a) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(a-b) + \sin(a+b)$ en fonction de $\sin a$ et $\cos b$.
b) En déduire que pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, λ_p est valeur propre de A_n et que X_p est un vecteur propre associé à λ_p .
5. En déduire que $\text{Spec}(A_n) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et que $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Partie II : Diagonalisation de A_n

6. Soit $U_n = (u_{p,q})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $u_{p,q} = \sin \frac{pq\pi}{n+1}$.

Montrer, à l'aide de la question 5 que U_n est inversible, et déterminer la matrice $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D_n = U_n^{-1} A_n U_n$.

7. a) Montrer que pour tout couple $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\lambda_p {}^t X_p X_q = \lambda_q {}^t X_p X_q$.
En déduire que la base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est orthogonale.

b) Montrer, pour tout p de $\llbracket 1, n \rrbracket$: $\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta_p) = 0$.

En déduire que, pour tout entier p de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\|X_p\|^2 = \frac{n+1}{2}$.

c) En déduire que

$$U_n^2 = \frac{n+1}{2} I_n, \quad \text{puis} \quad A_n = \frac{2}{n+1} U_n D_n U_n.$$

– FIN DE L'ACTE II –



DS 9 - solution

Exercice I

Suites et équivalents

Voir annales ECRICOME 2010 voie ECS, exercice 1.

Exercice II

Loi de Xenakis

Le début est inspiré de EDHEC 2010.

1.a) La variable $-Y$ est à valeurs dans $[-a; 0]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x < -a$, $F_Y(x) = 0$

Pour $x > 0$, $F_Y(x) = 1$

et si $x \in [-a; 0]$,

$$\begin{aligned} F_{-Y}(x) &= P(-Y \leq x) = 1 - P(-Y > x) \quad (Y \text{ à densité}) \\ &= 1 - P(Y \leq -x) \\ &= 1 - F_Y(-x) \\ &= 1 - \left(-\frac{x}{a}\right) = 1 + \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

$$F_Y(x) = \frac{x - (-a)}{a}.$$

On reconnaît : la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[-a; 0]$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi

$$-Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-a; 0]).$$

1.b) Les variables X et $-Y$ sont indépendantes, une des densités est bornée. Ainsi, le théorème de sommation s'applique : $X + (-Y) = X - Y$ est à densité et une densité h est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_{-Y}(t) dt.$$

Or pour $x, t \in \mathbb{R}$

$$f_X(x-t) f_{-Y}(t) \neq 0 \iff \begin{cases} 0 \leq x-t \leq a \\ -a \leq t \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-a \leq t \leq x \\ -a \leq t \leq 0 \end{cases} \iff \max(x-a, -a) \leq t \leq \min(0, x).$$

Ainsi pour $x \notin [-a; a]$, la condition précédente n'est jamais vérifiée et

$$h(x) = 0$$

Si $x \in [0; a]$, la condition devient $x-a \leq t \leq 0$

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{x-a}^0 f_X(x-t) f_{-Y}(t) dt = \int_{x-a}^0 \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} dt \\ &= \frac{a-x}{a^2} = \frac{a-|x|}{a^2}. \end{aligned}$$

Si $x \in [-a; 0]$, la condition devient $-a \leq t \leq x$ et

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-a}^x f_X(x-t) f_{-Y}(t) dt = \int_{-a}^x \frac{1}{a^2} dt = \frac{a+x}{a^2} \\ &= \frac{a-|x|}{a^2}. \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

2.a) On a $Z(\mathbb{R}) = [0; a]$. Ainsi

$$\forall t \in]-\infty; 0[, \quad H(t) = 0; \quad \forall t \geq a \quad H(t) = 1$$

et pour $t \in [0; a]$

$$\begin{aligned} H(t) &= P(|X-Y| \leq t) \\ &= P(-t \leq X-Y \leq t) \quad (X-Y \text{ à densité}) \\ &= G(t) - G(-t). \end{aligned}$$

Com. Comme $X-Y$ est une variable symétrique, une densité est paire, on a $G(t) + G(-t) = 1$. D'où

$$H(t) = 2G(t) - 1.$$

2.b) On sait que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Par différence et composition, H est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; a[$. Comme H est constante sur $] -\infty; 0[$ et $]a; +\infty[$, H est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, H est une fonction de répartition, H est continue à droite en 0 et a
 $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = H(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow a^-} H(t) = H(a) = 1$
 et $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$, $\lim_{t \rightarrow a^+} H(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} G(t) - G(a) = G(a) - G(a) = 0$
 Ce qui prouve la continuité de H en 0 et a .
 En résumé, H est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0; a\}$.
 La variable Z est donc à densité et une densité s'obtient par dérivation (là où c'est possible).

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0; a] \\ G(x) - (G(a) - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0; a] \\ \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

3. La variable Z est bornée donc elle admet des moments à tout ordre.

$$E(Z) = \int_0^a x h(x) dx = \frac{a}{3}$$

Puis

$$E(Z^2) = \int_0^a x^2 h(x) dx = \frac{a^2}{6}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}$$

4.a) def simulZ(a):

```
X = a * rd.random()
Y = a * rd.random()
return np.abs(X - Y)
```

4.b) Le programme donne pour 20 valeurs de a (uniformément réparties entre 1 et 20), une estimation de (loi faible des grands nombres)
 $E(Z)$ et $\sqrt{E(Z^2)}$

On constate que les valeurs obtenues se répartissent bien autour des droites

$$y = \frac{a}{3} \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Ce qui est bien accord avec l'étude théorique de la question précédente.

5.a) La fonction f_g est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour $A \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{-\infty}^A f_g(t) dt = \int_0^A f_g(t) dt = \int_0^A \frac{t}{g^2} e^{-t^2/(2g^2)} dt$$

$$= \left[-e^{-t^2/(2g^2)} \right]_0^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

Finalement, f_g est bien une densité de probabilité.

5.b) Notons que si g désigne la densité continue $N \hookrightarrow \mathcal{N}(g^2)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_g(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{g^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2g^2}\right) dt$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{g} \int_0^{+\infty} t^2 g(t) dt \quad (\text{parité})$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2g} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t) dt \quad (\text{th. de transfert})$$

On en déduit bien la convergence absolue et l'égalité

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{g} E(N^2) = g \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

5.c) Prévisions F_n , la fonction de répartition de N_n .

Comme $N_n(\mathbb{R}) = [0; 1]$, $N_n(\mathbb{R}) = [0; \sqrt{n}]$.

Pour $x \in \mathbb{R}_x^-$, $F_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_x^+$. Pour tout n tel que $x \in [0; \sqrt{n}]$, on a:

$$F_n(x) = P\left(\frac{1 - \Pi_n}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) = P(1 - \Pi_n \leq x/\sqrt{n})$$

$$= P(\Pi_n \geq 1 - x/\sqrt{n})$$

$$= 1 - P(\Pi_n < 1 - x/\sqrt{n})$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i < 1 - x/\sqrt{n}]\right)$$

$$= 1 - P(X < 1 - x/\sqrt{n})^n \quad (\text{même loi, indep.})$$

$$F_n(x) = 1 - H(1 - x/\sqrt{n})^n \quad (X \text{ à densité})$$

Prévisions H par intégration à partir de la densité

$\forall t \in [0; 1]$, $H(t) = 2\left(t - \frac{t^2}{2}\right)$

puis pour $x \in [0; \sqrt{n}]$.

$$H\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = 2\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{n}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2n}\right) = 1 - \frac{x^2}{n}$$

puis

$$n \ln H\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -x^2$$

par continuité de l'exponentielle.

$$H\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x^2}$$

$$\text{et} \quad F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-x^2}$$

En reprenant le calcul de la question 5.a), la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{R}(e)$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_e(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2e^2}\right) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On constate alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_e(x) \quad \text{où } e^2 = \frac{1}{12}.$$

Comme F_e est continue sur $\mathbb{R}$, on retrouve la définition de la convergence en loi

$$N_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \quad \text{où } X \hookrightarrow \mathcal{R}\left(\frac{1}{12}\right).$$

d). Posons

$$\tilde{M}_n = \frac{M_n}{a} = \max\left(\frac{X_1}{a}, \dots, \frac{X_n}{a}\right)$$

Or X_i/a suit une loi de Xenakis de paramètre 1. On sait alors

$$\text{que } \tilde{N}_n = \frac{1 - \tilde{M}_n}{1/\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \quad \text{où } X \hookrightarrow \mathcal{R}\left(\frac{1}{12}\right).$$

Or $a\tilde{N}_n = N_n$, d'où

$$N_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} aX.$$

on vérifie ensuite que $aX \hookrightarrow \mathcal{R}(a/\sqrt{12})$.

6.a) La variable M_n est bornée donc l'espérance existe.

Comme $M_n(\mathbb{R}) = [0, a]$, on a même :

$$E(M_n) = \int_0^a t \, dF_{M_n}(t) = - \int_0^a t \left(-\frac{d}{dt} F_{M_n}(t)\right) dt$$

Intégrons par parties avec les fonctions u, v et $\frac{1}{\sqrt{12}}$ définies par :

$$u(t) = t, \quad v(t) = 1 - F_{M_n}(t).$$

$$\begin{aligned} E(M_n) &= - \left[t(1 - F_{M_n}(t)) \right]_0^a + \int_0^a 1 \cdot (1 - F_{M_n}(t)) dt \\ &= 0 + \int_0^a 1 - P(M_n \leq t) dt. \\ &= \int_0^a P(M_n \geq t) dt \quad (M_n \text{ à densité}). \end{aligned}$$

6.b) On a avec le changement de variable affine $u = x/a$

$$I_n = \int_0^a H(x)^n dx = \int_0^1 H(a \cdot u)^n a du$$

Or on a en intégrant H de la question 2.b.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, a], \quad H(x) &= \frac{2}{a^2} \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= 2 \frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } I_n &= \int_0^1 a \left(2u - u^2 \right)^n du \\ &= a \int_0^1 \left(1 - (1-u)^2 \right)^n du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (1-u)^k du \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 (1-u)^k du \\ &\stackrel{v=1-u}{=} a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 v^k dv \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1}. \end{aligned}$$

6.c) Enfin, on obtient à l'aide des deux questions précédentes

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \int_0^a 1 - H(x)^n dx \\ &= a - I_n = a - a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1}. \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Bonus. Xenakis est architecte, ingénieur et compositeur mais pas mathématicien.

7.a)

$$L_1 \quad \text{matrice } [i, 0] = 1 \quad \# \text{ car } \binom{0}{i-1} = 1$$

$$L_2 \quad \text{matrice } [i, i] = 1 \quad \# \text{ car } \binom{i-1}{i-1} = 1.$$

$$L_3 \quad \text{range}(1, i)$$

$$L_4 = \text{matrice } [i-1, j-1] + \text{matrice } [i-1, j] \quad (\text{formule de Pascal}).$$

7.b) def esperance(n):

$$e = 0; \quad A = \text{binom}(n)$$

for k in range(n+1):

$$e = e + (-1)^k * k * A[k, n] / (2 * k + 1).$$

return 1 - e.

7.c) On conjecture que :

$$E(M_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{avec } G = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ce résultat peut s'écrire

$$E(M_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(X) \quad \text{où } X \hookrightarrow \mathcal{R}(G).$$

qui complète le résultat de la convergence en loi de la question 5.c)

Remarque. Il n'y a pas de résultat direct du type

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \not\Rightarrow E(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(X)$$

Problème I

Fonctions de Lambert et applications

1. Précisons les variations de f , dérivable par produit

$$f'(x) = (x+1)e^x > 0 \text{ssi } x > -1.$$

→ la fonction f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

→ f est continue sur $[-1, +\infty[$.

→ De plus, $f(-1) = -e^{-1}$ et $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $[-e^{-1}, +\infty[$.

2. Le théorème de la bijection garantit la continuité de W sur son ensemble de définition.

Comme f ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[$, on a la dérivabilité de W sur $]f(-1), \lim_{+\infty} f[=]-e^{-1}, +\infty[$ avec

$$\forall x \in]-e^{-1}, +\infty[, \quad W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))}$$

À l'aide de cette dernière expression, on a la continuité de W' .
Ce qui conclut.

3.a) Comme $\begin{cases} f(0) = 0 \\ 0 \in]-1, +\infty[\end{cases}$, on a $W(0) = 0$.

$$\text{De plus, } W'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

3.b) La fonction W est C^1 , la formule de Taylor-Young donne

$$\begin{aligned} W(x) &= W(0) + W'(0)(x-0) + o_0(x) \\ &= x + o_0(x) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } W(x) \sim x$$

Étude en $+\infty$

On a $x = W(x)e^{W(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'où

$$\frac{\ln(x)}{W(x)} = \frac{\ln(W(x)) + W(x)}{W(x)} = \frac{\ln(W(x))}{W(x)} + 1$$

Or, par composition et croissance comparée

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ln t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \\ W(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right. \text{ donc } \frac{\ln W(x)}{W(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Ainsi } \frac{\ln(x)}{W(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \text{ soit } W(x) \sim_{+\infty} \ln(x).$$

4.a) La fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $]0, 1[$.

On a une intégrale généralisée en 0 (surtout pour $\alpha < 0$).

D'après l'équivalent précédent:

$$x^\alpha W(x) \sim_0 x^{\alpha+1} = \frac{1}{x^{-(\alpha+1)}}$$

Par les critères de Riemann et d'équivalence d'intégrales de fonctions positives, il y a convergence si et seulement si

$$-(\alpha+1) < 1 \text{ soit } \alpha > -2.$$

4.b) La fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $[1, +\infty[$. On a une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus, on a

$$x^\alpha W(x) \sim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}}.$$

Procédons par disjonction des cas.

* Si $\alpha > -1$, on peut choisir $\beta \in]-\alpha, 1[$ de sorte que par les croissances comparées:

$$x^\alpha W(x) = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right). \quad (x^{\beta-\alpha} \ln(x) \xrightarrow{+\infty} 0).$$

On conclut alors sur la convergence de $\int_1^{+\infty} x^\alpha W(x) dx$.

* Soit $\alpha \leq -1$. Notons que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx \text{ diverge car dans le cas contraire,}$$

la condition $\frac{1}{x} = o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ entraînerait la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$. Ce qui serait absurde.

(Remarque: on peut aussi noter que $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_1^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$)

Remarquons que $x^\alpha \ln(x) \geq \frac{\ln(x)}{x}$

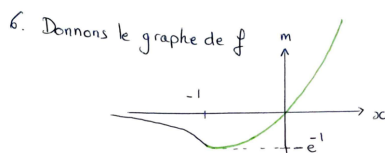
Par la contraposée du critère de comparaison, on a la divergence de $\int_1^{+\infty} \ln(x) dx$ et celle de $\int_1^{+\infty} x^\alpha W(x) dx$ par le critère d'équivalence.

Résumons: $\int_1^{+\infty} x^\alpha W(x) dx$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

5. La fonction f est continue et strictement monotone avec

$$f(-1) = -e^{-1} \text{ et } \lim_{-\infty} f = 0 \text{ (croiss. comparée)}.$$

D'après le théorème de la bijection, W est bien posée.



Ainsi, pour $m < -e^{-1}$, il n'y a pas de solution.

pour $m \geq 0$, il n'y a qu'une solution ($W(m)$)

pour $m \in]-e^{-1}, 0[$, il y a deux solutions ($W(m)$ et $V(m)$)

pour $m = -e^{-1}$, il y a une unique solution $W(m) = V(m)$

Précisons que c'est le théorème de la bijection qui permet le décompte exact.

7. On s'appuie de nouveau sur le graph de f .

Pour $m < -e^{-1}$, il n'y a pas de solution.

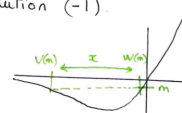
Pour $m = -e^{-1}$, il n'y a qu'une solution (-1).

Pour $m \in]-e^{-1}, 0[$, il y a une infinité de solutions

$$S = [V(m), W(m)]$$

Pour $m \geq 0$, on a de nouveau une infinité de solutions:

$$S =]-\infty, W(m)].$$



8. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{ax} + bx = 0 \Leftrightarrow 1 = -bx e^{-ax} \\ = \frac{b}{a} (-ax) e^{-ax} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -ax e^{-ax} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = f(-ax).$$

On reprend la question 6 avec $m = \frac{a}{b}$.

* Si $\frac{a}{b} < -e^{-1}$, pas de solution

* Si $\frac{a}{b} \geq 0$, une solution vérifiant $-ax = W(\frac{a}{b})$
soit $x = -W(a/b)/a$.

* Si $\frac{a}{b} \in]-e^{-1}, 0[$, deux solutions $-W(a/b)/a$; $-V(a/b)/a$.

* Si $\frac{a}{b} = -e^{-1}$, une unique solution $-W(a/b)/a = -1/a$.

9. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(N=n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Notons que $X(2) = \mathbb{N}$ et pour $k \in \mathbb{N}$

$$P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n) P_{[N=n]}(X=k) \\ = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n) P_{[N=n]}(X=k)$$

Or la variable X conditionnée à $[N=n]$ suit une loi binomiale de paramètre (n, p) car on compte le nombre de succès (billet gagnant) dans n répétitions d'expériences

de Bernoulli mutuellement indépendantes. Ainsi

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\ \stackrel{u=n-k}{=} \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{u=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{u+k}}{u!} (1-p)^u \\ = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{u=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^u}{u!} \\ = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

On constate que X suit une loi de Poisson de paramètre λp .
En particulier

$$E(X) = \lambda p, \quad V(X) = \lambda p.$$

10. Comme X est positive avec une espérance, l'inégalité de Markov impose

$$P(X \geq 2) \leq \frac{E(X)}{2} \leq \frac{\lambda p}{2} \leq \frac{\lambda}{2} \left(2 \frac{1-\alpha}{\lambda} \right) = 1-\alpha.$$

Ce qui conclut.

11. On a

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) \\ = 1 - e^{-\lambda p} - \lambda p e^{-\lambda p} \\ = 1 - (\lambda p + 1) e^{-\lambda p + 1} = 1 + x e^x - 1$$

Ainsi

$$(*) \Leftrightarrow 1 + x e^x \leq 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow x e^x \leq -\alpha e^{-1}$$

Ce qui conclut.

12. Notons que $x < 0$ et $-\alpha e^{-1} \in]-e^{-1}, 0[$.

D'après la question 7, on a

$$V(-\alpha e^{-1}) \leq x \leq W(-\alpha e^{-1})$$

$$\Leftrightarrow -V(-\alpha e^{-1}) \geq \lambda p + 1 \geq -W(-\alpha e^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 - V(-\alpha e^{-1})}{\lambda} \geq p \geq \frac{-1 - W(-\alpha e^{-1})}{\lambda}.$$

Avec la condition $p \in]0, 1[$, le plus grand p existe si et seulement si

$$\frac{-1 - V(-\alpha e^{-1})}{\lambda} < 1.$$

13. On sait que $w(x) e^{w(x)} = x$, d'où $w(x) = x \exp(-w(x))$
et

$$p_x(w(x)) = x \exp(-x \exp(-w(x)))$$

$$= x \exp(-w(x))$$

$$p_x(w(x)) = w(x)$$

14. La fonction p_x est de classe C^2 par composition avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p'_x(t) = x(-x(-e^{-t})) e^{-x e^{-t}} \\ = x^2 e^{-t - x e^{-t}}$$

On a bien $\varphi'_x(t) \geq 0$

Pour la majoration, on commence par étudier la fonction

$$\psi: t \in \mathbb{R} \mapsto t + x e^{-t}.$$

On a ψ dérivable et $\psi'(t) = 1 - x e^{-t}$. La fonction ψ est décroissante sur $] -\infty, \ln(x)]$ et croissante $[\ln(x), +\infty[$ avec un minimum donné par $\psi(\ln(x)) = \ln(x) + 1$.
On en déduit que

$$\varphi'_x(t) = x^2 e^{-\psi(t)} \leq x^2 e^{-\psi(\ln(x))} \\ \leq x^2 e^{-\ln(x) - 1} \\ \leq \left(\frac{x}{e} \right) \quad \text{Ce qui conclut.}$$

15. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|p_x(a) - p_x(b)| \leq \frac{x}{e} |a - b|.$$

Procédons maintenant par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(n): \forall x \in [0, e], |w_n(x) - w(x)| \leq \left(\frac{x}{e} \right)^n |1 - w(x)|$$

Initialisation. On a $w_0(x) = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vérifiée.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a

$$|w_{n+1}(x) - w(x)| = |p_x(w_n(x)) - p_x(w(x))| \\ \leq \frac{x}{e} |w_n(x) - w(x)| \\ \stackrel{\mathcal{P}(n)}{\leq} \left(\frac{x}{e} \right)^{n+1} |1 - w(x)|.$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

16. On commence par une fonction python qui évalue $p_x(t)$

```
def phi(x,t):  
    return x*np.exp(-x*np.exp(-t))
```

Puis on approxime $W(x)$ par $W_n(x)$ avec n "grand".

```
def W(x):  
    w = 1  
    for i in range(20):  
        w = phi(x,w)  
    return w.
```

Problème II

Diagonalisation d'une matrice tri-diagonale

Voir annales EML 1999 voie ECS.