CHAPITRE 3

Séries de Fourier

Ce qui est le plus gratifiant, c'est l'effet eurêka, l'excitation de la découverte et le plaisir de comprendre quelque chose de nouveau, l'impression d'être au sommet d'une colline, et d'avoir une vue dégagée.

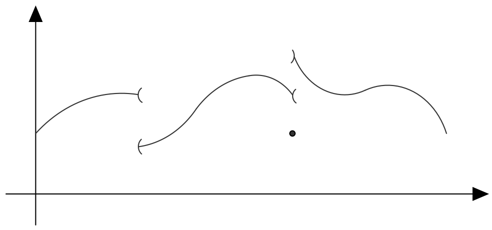
Maryam Mirzakhani (1977-2017), première femme lauréate de la médaille Fields.

1 Préliminaires

1.1 Rappels

DÉFINITION — **Continue par morceaux sur un segment**

Soient $a < b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$.
La fonction f est ***continue par morceaux*** *s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i;a_{i+1}[$ admet un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i;a_{i+1}]$.*



Exemples. • Toute fonction continue *sur un segment* est continue par morceaux.
• La fonction partie entière (restreinte à un segment) est une fonction continue par morceaux.
• Ci-contre, le graphe d'une fonction continue par morceaux.

Remarques.
• On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.
• De même, on définit la notion de fonction $\mathscr{C}^p$ par morceaux, on imposant le caractère $\mathscr{C}^p$ au lieu de seulement la continuité.

PROPOSITION — **Intégration sur une période**

Si f est continue par morceaux et T-périodique, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques.

- Dans la suite, on prendra en général $T = 2\pi$, quitte à se ramener à ce cas. En effet, si f est T-périodique, alors la fonction
$$g : t \mapsto f\left(\frac{T}{2\pi} t\right) \qquad \text{est } 2\pi\text{-périodique.}$$
- De plus, une fonction 2π-périodique est complètement déterminée par sa restriction à $[0, 2\pi]$. Soit $h = f\big|_{[0,2\pi]}$, la restriction de f à h.
  - Si h est continue par morceaux sur $[0; 2\pi]$, alors f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
  - Si h est continue sur $[0; 2\pi]$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
  - Si h est de classe $\mathscr{C}^p$ par morceaux sur $[0; 2\pi]$, alors f est de classe $\mathscr{C}^p$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1.2 Structure préhilbertienne des fonctions continues 2π-périodiques

On considère l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{C}$. On le note :
$$\mathscr{C}_{2\pi,\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$
On définit sur cet espace l'application :
$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, \mathrm{d}t \qquad (\star)$$
On obtient une forme hermitienne positive mais non définie (prendre $\mathbf{1}_{\{2\pi\mathbb{Z}\}}$ par exemple pour nier le caractère défini). Par contre, pour obtenir un produit scalaire, on peut se restreindre à l'espace $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions 2π-périodiques continues à valeurs dans $\mathbb{C}$. Dans la suite, on note $\|\cdot\|_2$, la forme quadratique associée.

PROPOSITION — **Une famille orthonormée de $\mathscr{C}_{2\pi,\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$**

On définit pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction :
$$e_k : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$
La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $\mathscr{C}_{2\pi,\text{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ relativement au produit scalaire défini par $(\star)$.

Preuve. Soient $j, k \in \mathbb{Z}$.
$$\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt}\, \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)t}\, \mathrm{d}t.$$

- Si $j = k$, on obtient
$$\langle e_k, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}t = 1.$$
- Si $j \neq k$,
$$\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)t}}{\mathrm{i}(j-k)} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Ainsi, la famille est orthonormée. ∎

PROPOSITION — **Une seconde famille o.n exprimée via sinus et cosinus**

La famille $\big(\mathbf{1},\ t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(nt),\ t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(nt)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire défini par $(\star)$. De plus,
$$\|\cos(n\cdot)\|_2{}^2 = \|\sin(n\cdot)\|_2{}^2 = \frac{1}{2}.$$

Preuve. On montre par le calcul que pour $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\cos(pt)\, \mathrm{d}t = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(pt)\, \mathrm{d}t = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(pt)\, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{si } n \neq p,$$

et $$\int_0^{2\pi}\cos^2(nt)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sin^2(nt)\,\mathrm{d}t=\pi.$$

Voici par exemple le détail du premier calcul en utilisant les formules d'Euler :

$$\sin(nt)=\frac{\mathrm{e}^{int}-\mathrm{e}^{-int}}{2\mathrm{i}},\qquad \cos(pt)=\frac{\mathrm{e}^{ipt}+\mathrm{e}^{-ipt}}{2}.$$

On obtient alors : $$\sin(nt)\cos(pt)=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+p)t}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-p)t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-n)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+p)t}\right).$$

En intégrant sur l'intervalle $[0;2\pi]$, on a :

$$\int_0^{2\pi}\sin(nt)\cos(pt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+p)t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-p)t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-n)t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+p)t}\,\mathrm{d}t\right).$$

Or, pour tout entier k,

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}2\pi & \text{si } k=0,\\ 0 & \text{si } k\neq 0.\end{cases}$$

Si $n\neq p$, alors les entiers $n+p$, $n-p$, $p-n$ et $-(n+p)$ sont tous non nuls, donc chacune des intégrales précédentes est nulle, d'où :

$$\int_0^{2\pi}\sin(nt)\cos(pt)\,\mathrm{d}t=0.$$

Si $n=p$, les termes correspondant à $n-p$ et $p-n$ valent 2π mais apparaissent avec des signes opposés, et s'annulent. On obtient encore :

$$\int_0^{2\pi}\sin(nt)\cos(pt)\,\mathrm{d}t=0.$$

Ce qui conclut. ■

1.3 Polynômes trigonométriques

DÉFINITION — Polynôme trigonométrique

*Un **polynôme trigonométrique** est un élément de l'espace vectoriel $\mathscr{T}_{2\pi}$ engendré par la famille*

$$\left(t\in\mathbb{R}\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Autrement dit, un polynôme trigonométrique s'écrit sous la forme

$$t\in\mathbb{R}\mapsto \mathrm{P}(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\quad \textit{où}\quad c_k\in\mathbb{C},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Remarques.

- L'ensemble $\mathscr{T}_{n,2\pi}=\mathrm{Vect}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right)_{|k|\leqslant n}$ est un espace vectoriel de dimension $2n+1$. Pour s'en convaincre, on peut exhiber un isomorphisme

$$\mathrm{P}\in\mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]\mapsto\left(t\mapsto \mathrm{e}^{-int}\cdot\mathrm{P}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right)\in\mathscr{T}_{n,2\pi}.$$

- On a l'égalité des sous-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Vect}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right)_{k\in\mathbb{Z}}=\mathrm{Vect}\left(1,\cos(nt),\sin(nt)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

- On pose, pour $k\in\mathbb{N}^*$:

$$a_k=c_k+c_{-k},\qquad b_k=\mathrm{i}(c_k-c_{-k}),\qquad a_0=2c_0.$$

On en déduit : $$\boxed{c_k=\frac{1}{2}(a_k-\mathrm{i}b_k),\qquad c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k+\mathrm{i}b_k),\qquad c_0=\frac{a_0}{2}.}$$

Ainsi, $$\sum_{k=-n}^{n}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)\right).$$

- Le polynôme est réel si et seulement si

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad (\text{équivalent à } a_k,\ b_k \in \mathbb{R}).$$

- Si $\mathrm{P}_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, alors, par orthogonalité de la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$\|\mathrm{P}_n\|_2{}^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right).$$

2 Séries de Fourier

2.1 Définitions des coefficients de Fourier et premiers calculs

DÉFINITION — **Coefficients de Fourier**

Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On définit :

$$c_n(f) = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \textit{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Règles de calculs

PROPOSITION

Les applications suivantes sont linéaires :

$$f \mapsto \widehat{f} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}, \quad f \mapsto (a_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{et} \quad f \mapsto (b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

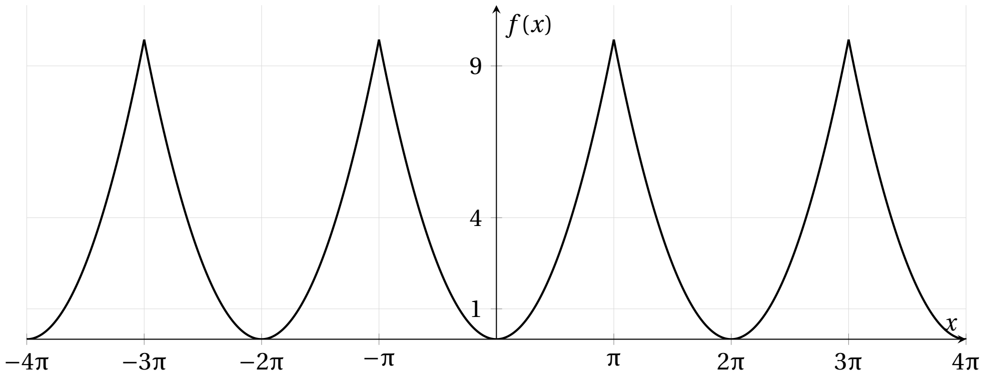
Précisons quelques simplifications dans les calculs des coefficients en utilisant des argument de symétries.

- Si f est réelle, alors $$c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}.$$
- Si f est paire, alors $$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t, \qquad b_n(f) = 0.$$
- Si f est impaire, alors $$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t, \qquad a_n(f) = 0.$$
- Si $g(t) = f(-t)$, alors $$c_n(g) = c_{-n}(f), \qquad a_n(g) = a_n(f), \qquad b_n(g) = -b_n(f).$$
- Si $g(t) = f(t+a)$ où $a \in \mathbb{R}$, alors $$c_n(g) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}na}c_n(f).$$

Exercice 1

✧ Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = x^2$ pour $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

ceF1



PROPOSITION **Lien avec la dérivée**

Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi,\text{pm}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

- *Si f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors*

$$c_n(f') = \mathrm{i}n\, c_n(f).$$

- *Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors*

$$c_n\left(f^{(k)}\right) = (\mathrm{i}n)^k c_n(f).$$

Preuve. Procéder à une intégration par parties pour le premier point puis par récurrence pour le second. ∎

2.2 Séries de Fourier et interprétation géométrique

DÉFINITION **Série de Fourier**

*Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi,\text{pm}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On appelle **série de Fourier** de f la série de fonctions*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_n c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

La somme partielle d'ordre n est notée : $\mathrm{S}_n(f) : t \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$.

Remarques.

- Donnons une expression de $\mathrm{S}_n(f)$ à l'aide de $a_n(f)$ et $b_n(f)$. Pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n(f)(t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\big(\cos(kt) + \mathrm{i}\sin(kt)\big) \\
&= c_0(f) + \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\big[\cos(kt) + \mathrm{i}\sin(kt)\big] + \sum_{k=-n}^{-1} c_k(f)\big[\cos(kt) + \mathrm{i}\sin(kt)\big] \\
&= c_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \big(c_k(f) + c_{-k}(f)\big)\cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{i}\big(c_k(f) - c_{-k}(f)\big)\sin(kt).
\end{aligned}$$

Retenons que :
$$\boxed{\mathrm{S}_n(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k(f)\sin(kt).}$$

- On rappelle que $\mathscr{C}_{2\pi,\mathrm{pm}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est muni de la forme hermitienne définie par

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

De plus, pour $k \in \mathbb{Z}$, e_k désigne la fonction 2π-périodique $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$. Dans ce cas,

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k = \langle f, e_k\rangle.}$$

Et $\mathrm{S}_n(f)$ est alors le projeté orthogonal de f sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathscr{T}_{2\pi,n}$. En effet, ce dernier admet $(e_k)_{k\in[\![-n;n]\!]}$ comme base orthonormée, on sait alors que

$$\mathrm{S}_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle\, e_k = p_{\mathscr{T}_{2\pi,n}}(f).$$

En reprenant le chapitre sur les espaces préhilbertiens, on peut retraduire l'inégalité de Bessel dans ce contexte :

PROPOSITION **Inégalité de Bessel**

Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi,\mathrm{pm}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|^2 \quad \textit{où} \quad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit la convergence de la série $\sum |c_k(f)|^2$ (c'est le théorème de convergence monotone). En particulier, le terme général tend vers 0. Il vient :

PROPOSITION **Lemme de Riemann-Lebesgue**

Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi,\mathrm{pm}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors

$$c_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dit autrement :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{et} \quad \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 2

✧ Prouver cet énoncé par intégration par parties dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

ceF2

Remarque. Ce résultat s'inscrit dans un fait plus général (voir exercice 11) : plus la fonction est globalement régulière, plus les coefficients de Fourier décroissent rapidement.

3 Convergences des séries de Fourier

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions définies sur un intrevalle I. Il existe plusieurs manières de définir la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une fonction f.

→ On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers une fonction f si

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers une fonction f si à partir d'un certain rang n_0 les fonctions $f-f_n$ sont bornées pour tout $n \geqslant n_0$ et
$$\left\|f-f_n\right\|_\infty := \sup_{t\in \mathrm{I}} \left|f(t)-f_n(t)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge quadratiquement** vers une fonction f si à partir d'un certain rang n_0 les fonctions $f-f_n$ sont de carrée intégrable pour $n \geqslant n_0$ et
$$\left\|f-f_n\right\|_2 := \sqrt{\int_{\mathrm{I}} \left|f_n(t)-f(t)\right|^2 \mathrm{d}t} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 3

✦ **Lien entre les différents types de convergences**

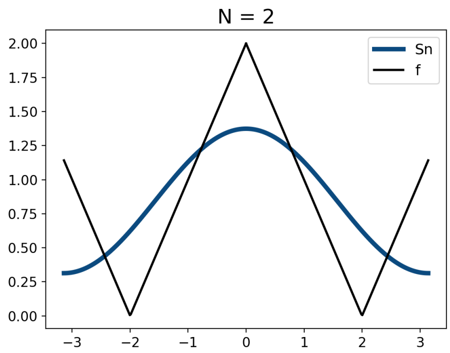
1. Justifier que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f alors elle converge aussi simplement vers f.
2. Justifier de plus que si I est un segment, la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f entraîne la convergence quadratique.

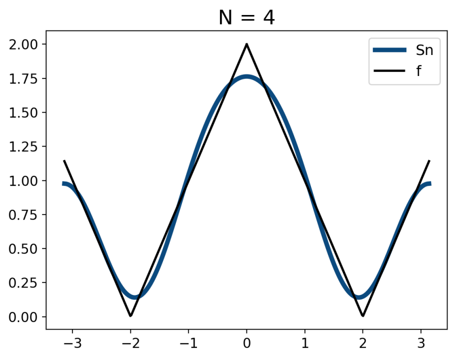
ceF3

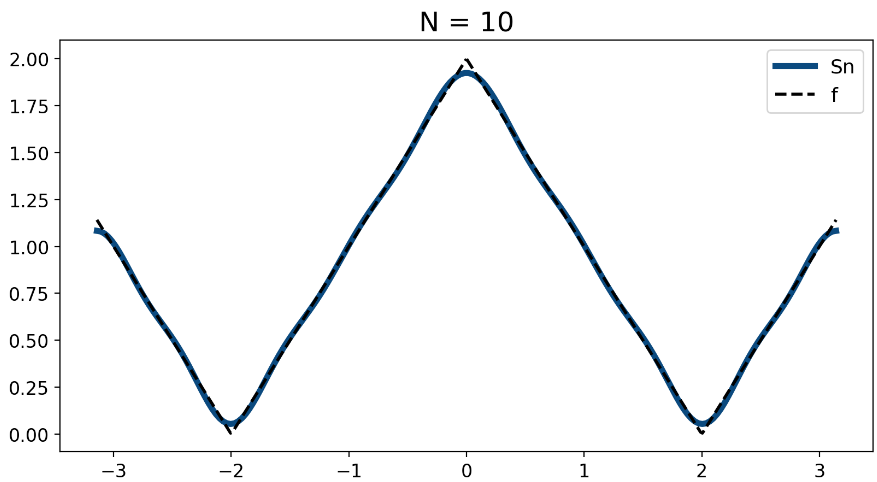
Remarque. La convergence uniforme conserve la continuité : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f et chaque f_n est continue sur I, alors la fonction f est aussi continue sur I. Par contre, la convergence simple ne conserve pas la continuité. Pour un contre exemple, on peut étudier la suite $(f_n)_n$ où f_n est définie sur $[0;1]$ par $f_n(t) = t^n$. On a une converge simple vers l'indicatrice $\mathbf{1}_{\{1\}}$ qui n'est pas continue.

3.1 Illustration de la convergence avec python

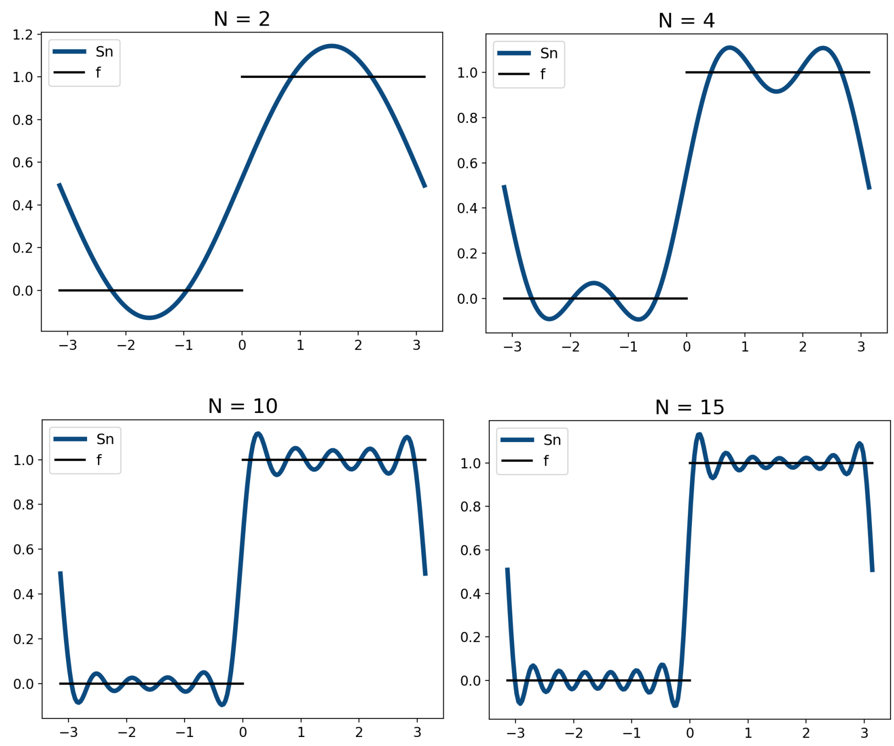
Dans la suite, on affiche le graphe de $\mathrm{S}_\mathrm{N}(f)$ pour la fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ définie sur $[-\pi;\pi]$ par $f(t) = \big||t|-2\big|$.







Voir exercice 15 pour le code. Testons maintenant avec une fonction discontinue :



3.2 Convergences ponctuelle et uniforme

THÉORÈME **de Dirichlet**

Soit f, une fonction 2π–périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{S}_n(f)(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

où $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$) désigne la limite à droite (resp. à gauche) de f en x.
En particulier, si f est continue en x, alors $\mathrm{S}_n(f)(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Preuve. On introduit le noyau de Dirichlet :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{D}_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

On peut donner deux nouvelles expressions de $\mathrm{D}_n(t)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_n(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} + \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\end{aligned}$$

d'après les formules d'Euler. En reprenant les calculs du chapitre 2, on montre aussi que pour t non multiple de π

$$\mathrm{D}_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

En utilisant la seconde expression, on montre aussi que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 \qquad (\bullet)$$

Dès lors, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-t)}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{D}_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad (t\leftarrow x-t,\ \mathrm{D}_n\ 2\pi\text{-périodique})\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\mathrm{D}_n(x-t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)\mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t\\
\mathrm{S}_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \big(u=-t,\ \mathrm{D}_n\ \text{paire}\big).
\end{aligned}$$

Avec l'aide de $(\bullet)$, notons maintenant que pour $u\in[0;\pi]$

$$\mathrm{S}_n(f)(x) - \frac{f\left(x^+\right)+f\left(x^{-1}\right)}{2} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left[f(x+u)-f\left(x^+\right)\right]\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi}\left[f(x-t)-f\left(x^-\right)\right]\mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Traitons la limite de la première intégrale, la seconde se gère de la même manière :

$$\left[f(x+u)-f\left(x^+\right)\right]\mathrm{D}_n(u) = \frac{f(x+u)-f\left(x^+\right)}{\sin(u/2)}\cdot\sin\left(\frac{2n+1}{2}u\right).$$

Posons $g:\ u\in[0;\pi]\longmapsto\dfrac{f(x+u)-f\left(x^+\right)}{\sin(u/2)}$. Par les théorèmes généraux, g est continue par morceaux sur $]0;\pi]$ et f étant $\mathscr{C}^1$ par morceaux, la limite

$$\lim_{u\to0^+}\frac{f(x+u)-f\left(x^+\right)}{u} = \ell_x \quad \text{existe.}$$

Ainsi
$$g(u) = 2\frac{f(x+u)-f\left(x^+\right)}{u}\times\frac{u/2}{\sin(u/2)}\xrightarrow[u\to0^+]{} 2\ell_x$$

et g est aussi continue par morceaux sur $[0;\pi]$. Le lemme de Riemann peut maintenant s'appliquer :

$$\int_0^{\pi}\left[f(x+u)-f\left(x^+\right)\right]\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De même pour la seconde intégrale. Finalement

$$\mathrm{S}_n(f)(x) - \frac{f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'où le résultat.

- Le second point est direct car si f est continue en x :

$$\frac{f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)}{2} = f(x).$$

■

Exemple. Reprenons la fonction de l'exercice 1, f est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux : cette fonction est somme de sa série de Fourier pour tout réel, et on a donc, pour tout x dans $[-\pi,\pi]$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

→ Si l'on fait $x=\pi$, on obtient :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^2},\quad \text{d'où}\quad \sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

→ Si l'on fait $x=0$, on obtient cette fois : $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$

PROPOSITION **de Dirichlet uniforme**

Si f est continue, 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f, c'est-à-dire

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathrm{S}_n(f)(x) - f(x)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Justifions dans un premier temps la convergence des séries :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|c_n(f)\right| \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|c_{-n}(f)\right|.$$

On a vu que $c_n(f) = c_n\left(f'\right)/(\mathrm{i}n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. D'où

$$0 \leqslant |c_n(f)| = \frac{\left|c_n\left(f'\right)\right|}{|n|} \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|c_n\left(f'\right)\right|^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

En reprenant l'inégalité de Bessel, on sait que les séries

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|c_n\left(f'\right)\right|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|c_{-n}\left(f'\right)\right|^2 \quad \text{convergent.}$$

Par le critère de comparaison, les séries initiales sont bien convergentes.
D'après le théorème de Dirichlet, on dispose de la convergence simple :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad f(x) - \mathrm{S}_n(f)(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Que l'on peut réécrire sous la forme : $$f(x) - \mathrm{S}_n(f)(x) = \sum_{k,|k|>n} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

Prouvons maintenant la convergence uniforme : pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a par inégalité triangulaire

$$|f(x) - \mathrm{S}_n(f)(x)| = \left|\sum_{k,|k|>n} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right| \leqslant \sum_{k,|k|>n} \left|c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right| = \sum_{k,|k|>n} \left|c_k(f)\right|.$$

Comme le majorant est indépendant de x :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \mathrm{S}_n(f)(x)| \leqslant \sum_{k>n} |c_k(f)| + \sum_{k>n} \left|c_{-k}(f)\right|.$$

Ce qui conclut. ■

3.3 Convergence en moyenne quadratique

THÉORÈME **Égalité de Parseval**

Soit f continue par morceaux, 2π-périodique. Alors

$$\left\|f - \mathrm{S}_n(f)\right\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{et} \quad \|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Preuve. • *Cas 1, f est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.* Dans ce cas, on a par définition de la norme

$$\|f - \mathrm{S}_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(t) - \mathrm{S}_n(f)(t)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{u\in[0;2\pi]} \left|f(u) - \mathrm{S}_n(f)(u)\right|^2 \mathrm{d}t = \|f - \mathrm{S}_n(f)\|_\infty^2.$$

D'après le théorème de Dirichlet uniforme, on obtient par encadrement

$$\|f - \mathrm{S}_n(f)\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ensuite, sachant que $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathrm{Vect}(e_k : k \in [\![-n;n]\!])$, on sait que $S_n(f)$ et $f - S_n(f)$ sont orthogonaux et le théorème de Pythagore donne

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \|f - S_n(f) + S_n(f)\|_2^2 \\ &= \left\|f - S_n(f)\right\|^2 + \left\|S_n(f)\right\|_2^2 \\ \|f\|_2^2 &= \left\|f - S_n(f)\right\|^2 + \sum_{|k|\leqslant n} \left|c_k(f)\right|^2.\end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du fait que $(e_k)_{k\in[\![-n;n]\!]}$ est une base orthonormée $\mathrm{Vect}(e_k : k \in [\![-n;n]\!])$. Par passage à la limite $n \to +\infty$, on a bien :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|c_k(f)\right|^2.$$

- *Cas général*

Soit f continue par morceaux et 2π-périodique. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, il existe une fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux telles que

$$\|f - \varphi\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\left\|f - S_n(f)\right\|_2 &= \left\|(f-\varphi) - (S_n(f) - S_n(\varphi)) + (\varphi - S_n(\varphi))\right\|_2 \\ &\leqslant \|f-\varphi\|_2 + \left\|S_n(f-\varphi)\right\|_2 + \left\|\varphi - S_n(\varphi)\right\|_2.\end{aligned}$$

Or S_n est une projection orthogonale donc $\left\|S_n(f-\varphi)\right\|_2 \leqslant \|f-\varphi\|_2$. D'où

$$\left\|f - S_n(f)\right\|_2 \leqslant 2\|f-\varphi\|_2 + \left\|\varphi - S_n(\varphi)\right\|_2 \leqslant 2\varepsilon + \left\|\varphi - S_n(\varphi)\right\|_2.$$

De plus, d'après le premier cas : $$\left\|\varphi - S_n(\varphi)\right\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Il existe donc un rang N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N$ alors

$$\left\|\varphi - S_n(\varphi)\right\|_2 \leqslant \varepsilon \quad \text{puis} \quad \left\|f - S_n(f)\right\|_2 \leqslant 3\varepsilon.$$

Ce qui permet de conclure par définition de la limite. ∎

Remarque. Il est possible de simplifier les hypothèses sur f avec une fonction f de carré intégrable sur $[0;2\pi]$.

Exercice 4

✦ Injectivité de la transformée de Fourier discrète

Justifier que l'application $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est injective. Est-elle surjective ?

ceF4

4 Cas des fonctions T-périodiques

Si f est T-périodique, on se ramène au cas 2π-périodique par le changement de variable

$$g(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right).$$

Les coefficients de Fourier s'écrivent alors :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi nt/T}\,dt.$$

Les théorèmes sont alors identiques.

Exercices

Entraînements aux calculs

Exercice 5. ✦ Soient $a \in]0, \pi[$ et f la fonction 2π-périodique telle que pour tout $x \in [-\pi; \pi]$ # ceF5

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-a; a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer les coefficients de Fourier de f, en déduire que :

$$\frac{\pi - a}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n}.$$

Exercice 6. ✦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{e^{it}}$. # ceF6

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos(t)}\, dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!^2}$.

Exercice 7. ✦ **Calcul de coefficients de Fourier et applications** # ceF7

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique telle que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = |x|$.
2. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 8. ✦ # ceF15

1. Tracer le graphe sur $[-\pi; \pi]$ de $f : x \mapsto |\sin(x)|$.
2. Expliciter les coefficients trigonométriques de f. Que dire de la convergence de la série de Fourier de f ?
3. Montrer que : $\quad \forall x \in [0, \pi], \quad \sin x = \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)^2}{4k^2 - 1}$.

   On pourra s'aider puis prouver l'égalité suivante : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$.

Compléments

Exercice 9. ✦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose # ceF13

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f^{(n)}(t) \right|^2 dt.$$

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1}{}^2 \leqslant I_n I_{n+2} \quad \text{puis} \quad I_{n+1} \leqslant \frac{I_n + I_{n+2}}{2}.$$

Exercice 10. ✦ **Inégalité de Wirtinger** # ceF8

Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.

1. Justifier que $\quad \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \leqslant \int_0^{2\pi} \left| f'(t) \right|^2 dt$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir égalité.

Exercice 11. ✦ **Régularité de la fonction et vitesse de décroissance** # ceF9

1. Justifier que si f est une fonction 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ alors : $\quad c_n(f) = o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$.

2. a) Soit f, une fonction 2π-périodique et $\alpha-$höldérienne. C'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

Justifier que pour tout $\beta > \alpha$, $\qquad c_n(f) = o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right).$

b) *Facultatif.* Que dire de f si $\alpha > 1$?

Ces résultats ont des conséquences pratiques importantes pour la compression. Plus un signal est régulier, plus le nombre de coefficients de Fourier à transmettre est faible et donc la compression efficace.

Exercice 12. ✦✦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π périodique et continue par morceaux. On suppose qu'il existe une famille $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que si on pose # ceF14

$$C_n(f) = \sum_{|k|\leqslant n} c_k e_k$$

alors $(C_n(f))_n$ converge uniformément vers f. Montrer que :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k = c_k(f) \qquad \left(\text{le } k^{\text{ième}} \text{ coefficient de Fourier de } f\right).$$

Exercice 13. ✦✦✦ **Produit de convolution et théorème de Féjer** # ceF10

On définit leur produit de convolution deux fonctions continues f et g par

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans toute la suite, $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, on note $e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ et

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}_k \quad \text{et} \quad C_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}.$$

1. Vérifier que $f \star S_n$ est un polynôme trigonométrique. Comment interpréter $f \star S_n$ avec le vocabulaire des séries de Fourier ?

2. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)} \quad \text{puis} \quad C_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2.$$

c) Soient $\alpha \in]0,\pi]$ et $x \in [-\pi;\pi] \setminus [-\alpha;\alpha]$, en remarquant que $|\sin(x/2)| \geqslant |\sin(\alpha/2)|$, déterminer a_n, dépendant uniquement de α et n tels que

$$\forall\, x \in [-\pi,\pi] \setminus [-\alpha,\alpha], \qquad \left|C_n(x)\right| \leqslant a_n \quad \text{et} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dit autrement, (C_n) *converge uniformément vers 0 sur* $[-\pi,\pi] \setminus [-\alpha,\alpha]$.

3. a) Justifier que

$$\left|f \star C_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\leqslant|u|\leqslant\pi} |f(x-u) - f(x)|C_n(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2\pi}\int_{|u|\leqslant\alpha} |f(x-u) - f(x)|C_n(u)\,\mathrm{d}u.$$

b) Montrer que $(f \star C_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f \star C_n(x) - f(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On admettra le théorème de Heine : Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors* f *est uniformément continue :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x,y) \in [a;b]^2, \qquad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Exercice 14. ✦✦✦ **Théorèmes de Weirestrass** # ceF11

L'exercice précédent a permis d'établir le *théorème de Weierstrass trigonométrique* :

Toute fonction continue et 2π*-périodique sur* $\mathbb{R}$ *est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

On se propose d'en déduire le théorème de Weierstrass sur un segment.

Toute fonction continue sur un segment $[a;b]$ *est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Expliciter une fonction affine bijective φ de $[-\pi;\pi]$ dans $[a;b]$.
2. On définit la fonction $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ par
$$g(t) = f(\varphi(t)).$$
   a) Montrer que g est continue sur $[-\pi,\pi]$.
   b) Prolonger g en une fonction $\widetilde{g}$ définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$.
3. D'après le résultat admis, il existe donc une suite suite de polynômes trigonométriques $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\mathrm{T}_n(t) - \widetilde{g}(t)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
En déduire que
$$\sup_{x\in[a;b]} |\mathrm{T}_n \circ \varphi^{-1}(x) - f(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
4. Conclure sur l'existence d'une suite de polynôme $(\mathrm{P}_n)_n$ telle que
$$\sup_{x\in[a;b]} |\mathrm{P}_n(x) - f(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
5. *Application*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\int_a^b f(t)t^k \,\mathrm{d}t = 0$.
   a) Démontrer que $\int_a^b f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$.
   b) En déduire f.

Un peu de python

Exercice 15. ✦✦ **Calculs approchés des coefficients de Fourier** # ceF12

On admet la formule de Simpson[1] : pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x = \frac{\beta-\alpha}{6}\left[\mathrm{P}(\alpha) + 4\mathrm{P}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \mathrm{P}(\beta)\right].$$

Partant de ce constant, pour une fonction continue f, on approxime l'intégrale sur $[\alpha;\beta]$ par

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \simeq \mathrm{I}(f,\alpha,\beta) = \frac{\beta-\alpha}{6}\left[f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)\right] \qquad (\bullet)$$

Pour obtenir une meilleure approximation sur un segment $[a;b]$, on partitionne uniformément le segment $[a;b]$ en p sous-segments. Sur chacun sous-segment, on approxime l'intégrale à l'aide de la relation $(\bullet)$. Une approximation d'ordre p est alors donnée par[2]

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{I}\big(f, a+kh, a+(k+1)h\big) \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{p}.$$

1. Compléter la fonction `Approx` qui prend en arguments un entier naturel non nul p, une fonction f, deux réels a, b et renvoie une approximation de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du schéma décrit ci-dessus.

---

1. Mais on pourra la démontrer directement en posant $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \alpha\mathrm{X}^2 + \beta\mathrm{X} + \gamma$.
2. On pourra noter l'analogie avec les sommes de Riemann.

Editeur

```
def Approx( ... ):
    I=
    h=
    for k in ... :
        alpha= ...
        beta= ...
        I=  ...
    return I
```

2. Modifier la fonction précédente pour obtenir une fonction python `an` qui prend en arguments un entier naturel n, une fonction f et renvoie une approximation de $a_n(f)$ (on pourra choisir $p = 20$).
3. En déduire une fonction python `aCoeff` qui prend en arguments un entier naturel N, une fonction f et renvoie une matrice ligne contenant une approximation de
$$\begin{bmatrix} a_0(f) & a_1(f) & \dots & a_N(f) \end{bmatrix}.$$
De même, on admet que l'on dispose d'une fonction `bCoeff` qui prend en arguments un entier naturel N, une fonction f et renvoie une matrice ligne contenant une approximation de $\begin{bmatrix} 0 & b_1(f) & \dots & b_N(f) \end{bmatrix}$.
4. Compléter le programme qui permet d'afficher $S_N(f)$ pour la fonction $f \in E$ définie sur $[-\pi;\pi]$ par $f(t) = \big||t|-2\big|$.

Editeur

```
def f(t):

    ...

    return ...
```

```
N=10 # un choix d'une valeur de N
x=np.linspace(-np.pi,np.pi,100)
A=aCoeff(f,N), B=bCoeff(f,N)
Y=np.zeros(100)
for i in range(0,100):
    Y[i]=A[0]/np.sqrt(2)
    for k in range(1,N+1):
        Y[i]= ...
plt.plot(x,Y,'r')
plt.plot(x,f(x),'b')
plt.show()
```

Joseph Fourier 1768-1830

Indications et solutions

Exercice 6

1. Notons que par développement en série entière de l'exponentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{n!}.$$

Justifions que l'on peut identifier et avoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n(f) = \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \quad c_n(f) = 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)t}\,\mathrm{d}t.$$

Justifions maintenant l'interversion : Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ avec $\mathrm{N} \geqslant k$.

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)t}}{n!} + \underbrace{\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)t}}{n!}}_{=\mathrm{R}_\mathrm{N}(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \overbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)t}}{n!}\,\mathrm{d}t}^{}_{=\delta_{k,n}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{R}_\mathrm{N}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{k!} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{R}_\mathrm{N}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\left| \int_0^{2\pi} \mathrm{R}_\mathrm{N}(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{2\pi} |\mathrm{R}_\mathrm{N}(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)t}\right|}{n!}$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Par encadrement

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{R}_\mathrm{N}(t)\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Finalement, par passage à la limite :

$$c_k(f) = \frac{1}{k!}.$$

Il en va de même pour $k < 0$.

Généralisons l'interversion somme/intégrale précédente en énonçant un théorème classique :

→ Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$, convergent uniformément vers f alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour la preuve, on écrit pour $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b \left| f_n(t) - f(t) \right| \mathrm{d}t$$

$$\leqslant (b-a) \left\| f_n - f \right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Notons maintenant que le théorème de Dirichlet uniforme s'applique. On a donc convergence uniforme de la série de Fourier. En particulier, on retrouve la convergence simple : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

3. C'est une conséquence de l'égalité de Parseval sachant f continue (par morceaux). En effet

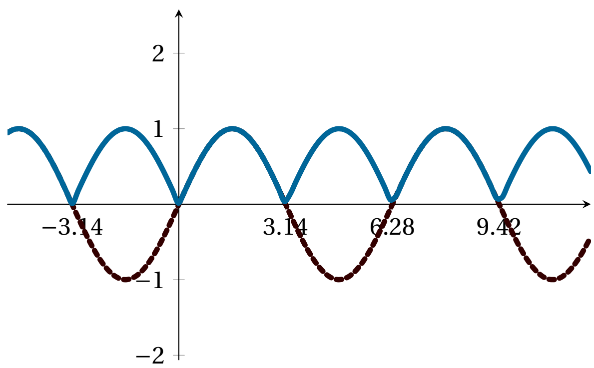
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!^2}$$

$$\text{et} \quad \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{car} \quad f(t)\overline{f(t)} = \mathrm{e}^{\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t)}\mathrm{e}^{\cos(t)-\mathrm{i}\sin(t)} = \mathrm{e}^{2\cos(t)}.$$

Exercice 8

1.



2. Comme f est une fonction paire, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n(f) = 0$$

et pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \text{ car } \sin(t) \geqslant 0 \text{ sur } [0;\pi] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(t+nt)+\sin(t-nt)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1} - \frac{\cos((1-n)t)}{1-n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right]
\end{aligned}$$

→ Si n est impair, on trouve directement 0. Si $n = 1$, on trouve aussi 0.
→ Si n est pair :

$$a_n(f) = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1}.$$

Enfin

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}[-\cos t]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Finalement, le théorème de Dirichlet s'applique (f est continue sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}^1$ par morceaux), on a convergence simple (et même uniforme) de la série de Fourier. En particulier pour tout réel x

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nt) \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*\ n \text{ pair}} a_n(f)\cos(nt) \quad (n = 2k) \\
|\sin(x)| &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi\left(4k^2-1\right)}\cos(2kt).
\end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient

$$0 = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi\left(4k^2-1\right)}$$

Soit $$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Remarque. On peut retrouver ce résultat par télescopage. pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} -\frac{1/2}{2k+1} + \frac{1/2}{2k-1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{2(k-1)+1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\mathrm{N}+1}\right) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. De plus, on sait que

$$\cos(2kt) = \cos(kt)^2 - \sin(kt)^2 = 1 - 2\sin(kt)^2.$$

D'où

$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{4}{\pi\left(4k^2-1\right)} + \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\sin(kt)^2$$

Le résultat s'en déduit avec la remarque précédente.

Exercice 9

1. On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'\cdot\overline{f'} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[f^{(n+1)}\cdot\overline{f^{(n)}}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f^{(n+2)}\overline{f^{(n)}}\right).
\end{aligned}$$

Comme le crochet est nul par 2π-périodicité, on a

$$\mathrm{I}_{n+1} = -\langle f^{(n+2)}, f^{(n)}\rangle$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathscr{C}^0_{2\pi}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathrm{I}_{n+1}| \leqslant \|f^{(n)}\|_2\cdot\left\|f^{n+2}\right\|_2 = \sqrt{\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+2}}.$$

Le premier résultat s'en déduit.
Le second point résultat découle de l'inégalité

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\qquad |\alpha\beta| \leqslant \frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$$

appliquée à $\alpha = \sqrt{\mathrm{I}_n}$, $\beta = \sqrt{\mathrm{I}_{n+2}}$.

Exercice 10

1. D'après l'égalité de Parseval (f et f' sont $\mathscr{C}^0_{2\pi,\mathrm{pm}}$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|c_k(f)\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}^{+\infty}\left|c_k(f)\right|^2\left(\text{car}\int_0^1 f = 0\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f'(t)\right|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|c_k\left(f'\right)\right|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}k^2\left|c_k(f)\right|^2.$$

D'où

$$\int_0^{2\pi}\left(f'\right)^2 - \int_0^{2\pi}(f)^2 = 2\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{\left(k^2-1\right)}_{\geqslant 0}\left|\mathrm{C}_k(f)\right|^2 \geqslant 0.$$

Ce qui conclut.

Notons que le résultat se généralise à toute fonction f continue sur $[0;2\pi]$. En effet, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction $\tilde{f}$ obtenue en « périodisant » la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Notons que

$$\int_0^{2\pi} \left|f'\right|^2 - \int_0^{2\pi} |f|^2 = 2\pi \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|\geqslant 2}} \underbrace{\left(k^2-1\right)}_{>0} \underbrace{\left|c_k(f)\right|^2}_{\geqslant 0}.$$

Il y a égalité si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad |k| \geqslant 2 \quad \Rightarrow \quad c_k(f) = 0$$

si et seulement si il existe trois nombres α, β et γ tels que

$$f = \alpha + \beta e_1 + \gamma e_{-1}.$$