



Thème : Comparaison série/intégrale



Exercice 1. ♦ ✎

RA26

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 2. ♦ ✎ Équivalent des sommes partielles d'une série divergente

RA27

L'objectif est de prouver la divergence de la série $\sum_{k \geq 3} \frac{1}{k \ln k}$ et de déterminer un équivalent des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$.
2. a) Montrer que pour tout $k \geq 2$: $\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}$.
b) En déduire, pour tout $k \geq 3$,

$$\int_3^n \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_3^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq S_n \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln t}$$

3. Calculer, pour tous a, b réels strictement supérieurs à 1 : $\int_a^b f(t) dt$.
4. a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln k}$ diverge.
b) Utiliser la question 2.(b) pour trouver un équivalent de S_n .

Exercice 3. ♦♦♦

Oral ESCP 2001, n°9 # RA28

1. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.
a) Montrer que f est positive et tend vers 0 en $+\infty$.
b) Montrer que, pour tout réel $h > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$h \sum_{n=1}^N f(nh) \leq \int_0^{Nh} f(x) dx \leq h \sum_{n=0}^{N-1} f(nh).$$

- c) En déduire que, pour tout réel $h > 0$, la série de terme général $f(nh)$ converge et que :

$$-hf(0) + h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh).$$

- d) Montrer que, quand h tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

2. a) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} t^{n^2}$ converge pour tout réel $t \in]-1, 1[$.
b) Montrer que, quand t tend vers 1 par valeurs inférieures,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-t}}.$$

Exercice 1

p. 1

RA26

Exercice 2

p. 1

RA27

- 1) Pour tout $t \in]1, +\infty[$, $f'(t) = -\frac{\ln(t)+1}{(t \ln t)^2} < 0$. La fonction f est décroissante.
- 2) a) Soit $k \geq 2$. La fonction f est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc, pour tout réel t tel que $k \leq t \leq k+1$, on a

$$\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \frac{1}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

Par croissance de l'intégrale ($k < k+1$), il vient

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k \ln k}.$$

Ainsi, pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

- b) En utilisant la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale,

$$\int_3^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} = \int_3^n \frac{dt}{t \ln t} + \int_n^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \geq \int_3^n \frac{dt}{t \ln t}.$$

La première inégalité est justifiée.

Pour la seconde inégalité, on somme de 3 à n , l'inégalité de droite de la question précédente. Cela donne

$$\sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

En utilisant la relation de Chasles

$$\int_3^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq S_n.$$

Pour la dernière inégalité, on somme de 2 à $n-1$ l'inégalité de gauche de la question précédente. Cela donne

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t}.$$

La relation de Chasles pour la somme des intégrales et un changement d'indice pour la somme de gauche donnent :

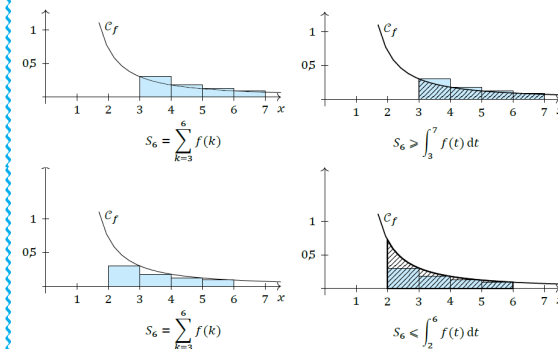
$$S_n = \sum_{p=3}^n \frac{1}{p \ln p} \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln t}.$$

Conclusion, pour tout $k \geq 3$,

$$\int_3^n \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_3^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq S_n \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln t}.$$

Remarque

Illustrons par des dessins l'encadrement de S_6 . Selon que les rectangles ont le coin supérieur droit ou gauche sur la courbe, on obtient l'une ou l'autre des inégalités.



- 3) On introduit la fonction $u(t) = \ln t$ pour $t > 0$. On constate que

$$\int_a^b \frac{dt}{t \ln t} = \int_a^b \frac{1/t}{\ln t} dt = \int_a^b \frac{u'(t)}{u(t)} dt = [\ln |\ln t|]_a^b = \ln |\ln b| - \ln |\ln a|.$$

- 4) a) Pour tout $n \geq 3$, on a donc $\int_3^n \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 3) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

D'après la question 2 b) $\int_3^n \frac{dt}{t \ln t} \leq S_n$. Donc $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc

$$\text{La série } \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln k} \text{ diverge.}$$

- b) Soit $n \geq 3$. L'encadrement de la question 2 b) et la question 4) donnent

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 3) \leq S_n \leq \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

En divisant par $\ln(\ln n)$ qui est positif ($n \geq 3 > e$) :

$$1 - \frac{\ln(\ln 3)}{\ln(\ln n)} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln n)} \leq 1 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)}.$$

D'après le théorème d'encadrement, il vient $\frac{S_n}{\ln(\ln n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Conclusion

$$S_n \sim \ln(\ln n).$$

Solution :

1. a) ★ Supposons qu'il existe a tel que $f(a) < 0$, alors $\forall t \geq a, f(t) \leq f(a)$ et donc : $\forall x \geq a, \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x f(a) dt = (x-a)f(a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, ce qui contredit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

★ Ainsi f est décroissante et positive, donc admet une limite $\ell \geq 0$ en $+\infty$. Supposons que $\ell > 0$, alors $\int_0^x f(t) dt \geq \int_0^x \ell dt = \ell x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui contredit à nouveau la convergence de l'intégrale. Bref :

f est positive de limite nulle en $+\infty$

b) Par décroissance de f :

$$hf((n+1)h) \leq \int_{nh}^{(n+1)h} f(t) dt \leq hf(nh)$$

En sommant, il vient bien :

$$h \sum_{n=1}^N f(nh) \leq \int_0^{Nh} f(x) dx \leq h \sum_{n=0}^{N-1} f(nh)$$

c) Soit $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$. Comme $f \geq 0$, $\int_0^{Nh} f(t) dt \leq I$, donc :

$$\sum_{n=1}^N f(nh) \leq \frac{I}{h}$$

La série de terme général $f(nh)$ étant à termes positifs, elle converge. Par passage à la limite dans l'encadrement précédent, il vient :

$$-hf(0) + h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$$

SOURCE ESCP 2001

d) Ainsi $I \leq h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \leq I + f(0)h$ et, par encadrement :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) = I$$

Si $f \neq 0$, on a $I > 0$ et : $\sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \underset{(h \rightarrow 0^+)}{\sim} \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Le résultat reste banalement vrai si f est la fonction nulle !

2. a) Soit $t \in]-1, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|t|^{n^2} \leq |t|^n$, donc la série de terme général $|t|^{n^2}$ est (absolument) convergente.

b) On écrit alors, pour $t \in]0, 1[$: $t^{n^2} = e^{n^2 \ln t} = e^{-(n\sqrt{-\ln t})^2}$.

Or la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, d'intégrale convergente, avec $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Lorsque t tend vers 1 par valeurs inférieures, $-\ln t$ tend vers 0 par valeurs supérieures. On peut donc appliquer ce qui précède et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{-\ln t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$