



Thème : Problèmes d'interversion



Exercice 1. ♦

d'après EMLyon, 2024 # RA29

On considère, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_n(t) = \begin{cases} n^2 t, & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - t\right), & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \text{si } t \notin]0, \frac{2}{n}] \end{cases}.$$

- Représenter l'allure de la courbe de h_n .
Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$, h_n peut être considérée comme une densité de probabilité.
- Soit $t \in [0, 1]$ fixé. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t)$?
- Vérifier alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(t) dt \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) dt.$$

Le résultat de cette question permet d'observer que certaines permutations de limites et d'intégrales ne sont pas licites...

Exercice 2. ♦ Pour tout réel x , on pose :

RA30

$$c(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

- Justifier que $c(x)$ et $s(x)$ sont bien définis pour tout réel x .
- Justifier que les fonctions c et s sont bien définies, dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $c' = s$, $s' = c$.
- Tracer les graphes de ces deux fonctions.

Exercice 3. ♦♦ Interversion somme/dérivation

RA31

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que f_n'' soit bornée sur I , et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n = \sup_{x \in I} |f_n''(x)|.$$

On suppose que, pour tout $x \in I$, les séries $\sum f_n(x)$, $\sum f_n'(x)$ et $\sum M_n$, convergent, et on note, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{et} \quad M = \sum_{n=0}^{+\infty} M_n.$$

- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tous réels x, h tels que $x \in I$, $x + h \in I$, on a

$$|f_k(x+h) - f_k(x) - h f_k'(x)| \leq M_k \frac{h^2}{2}.$$

- En déduire que pour tous réels x, h tels que $x \in I$, $x + h \in I$, on a

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \right| \leq M \frac{|h|}{2}.$$

- Conclure en montrant que f est dérivable et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.