



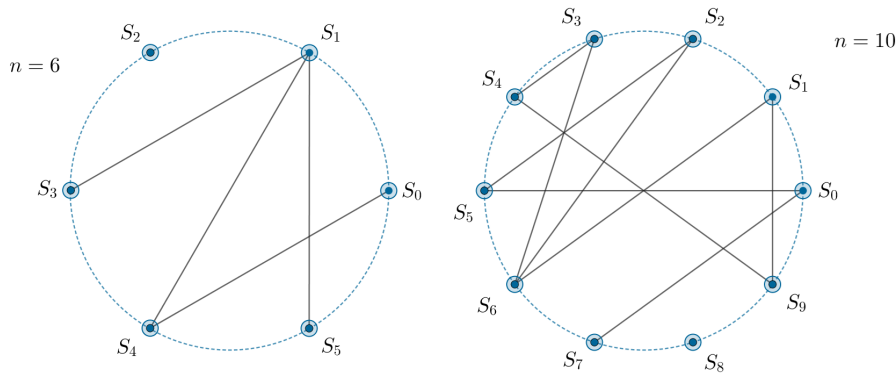
Thème : Graphes aléatoires



Exercice 1. ♦♦ Graphes aléatoires d'Erdős et Rényi

CVA59

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $p \in]0; 1[$. On place n points régulièrement sur un cercle numérotés de S_1 à S_n . Pour chaque paire de points $\{S_i; S_j\}$ (pour $i \neq j$), on décide de relier (ou non) les deux points par un segment avec probabilité p .



On parle alors de graphes aléatoires, les points sont les sommets du graphe et les segments sont les arêtes du graphe. De plus, on dit que deux sommets sont voisins s'ils sont reliés par une arête.

1. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe contenant n sommets?

Pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on pose

$$T_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une arête entre les sommets } S_i \text{ et } S_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, les variables $T_{i,j}$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre p et sont mutuellement indépendantes.

2. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On considère la variable aléatoire D_k égale au nombre de voisins du sommets k .
 - a) Exprimer D_k à l'aide des variables $T_{i,j}$.
 - b) Reconnaître la loi de D_k .
3. Pour $k \neq \ell$, est-ce que les variables D_k et D_ℓ sont indépendantes?
4. On dit que le sommet k est isolé si $D_k = 0$ est réalisé. On note Z_n la variable aléatoire comptant les sommets isolés d'un graphe aléatoire G à n sommets et X_k la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si le sommet k est isolé et 0 sinon.
 - a) Montrer que : $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$. En déduire que $\mathbf{E}(Z_n) = n(1-p)^{n-1}$.
 - b) Montrer que : $Z_n^2 = \sum_{k=1}^n X_k + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$.
 - c) Justifier que $\mathbf{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = (1-p)^{2n-3}$. En déduire que $\mathbf{E}(Z_n^2) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$.
- On suppose désormais que $p = p_n = c \frac{\ln(n)}{n}$, avec $c > 0, c \neq 1$.
5. Montrer que $(1-p_n)^{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (1-p_n)^n$ puis que $(1-p_n)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{-c}$.
6. On suppose que $c > 1$. À l'aide de l'inégalité de Markov, déduire la limite de $\mathbf{P}([Z_n \geq 1])$ puis de $\mathbf{P}([Z_n = 0])$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.
7. En remarquant que $[Z_n = 0] \subset [|Z_n - \mathbf{E}(Z_n)| \geq \mathbf{E}(Z_n)]$, montrer que : $\mathbf{P}([Z_n = 0]) \leq \frac{\mathbf{V}(Z_n)}{\mathbf{E}(Z_n)^2}$.
8. En déduire que si $c < 1$, $\mathbf{P}([Z_n = 0]) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Ce sujet est adapté d'un sujet 0 donné en maths appliquées où les graphes font partie du programme.

1. Le nombre maximal d'arêtes correspond au nombre de paires de sommets soit

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. On a

$$D_k = \sum_{i=1}^{k-1} T_{i,k} + \sum_{i=k+1}^n T_{k,i}.$$

La variable D_k est la somme de $(n-1)$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p d'où D_k suit la loi binomiale de paramètres $n-1$ et p .

3. Non, les variables ne sont pas indépendantes. Par exemple,

$$[D_k = 0] \cap [D_j = n-1] = \emptyset$$

est de probabilité nulle alors que

$$\mathbf{P}(D_k = 0)\mathbf{P}(D_j = n-1) \neq 0.$$

- 4.a) Pour tout indice k ,

$$\mathbf{E}(X_k) = \mathbf{P}([X_k = 1]) = \mathbf{P}([D_k = 0])$$

qui vaut $(1-p)^{n-1}$ d'après la loi de D_k , d'où par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Z_n) = n(1-p)^{n-1}.$$

- 4.b) On a

$$\begin{aligned} Z_n^2 &= \left(\sum_{k=1}^n X_k \right)^2 \\ &= \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} X_i X_j \\ &= \sum_{1 \leq i=j \leq n} X_i X_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} X_i X_j. \end{aligned}$$

Or comme toute variable de Bernoulli $X_i^2 = X_i$ et on a aussi

$$\sum_{1 \leq j < i \leq n} X_i X_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$$

d'où on obtient bien que :

$$Z_n^2 = \sum_{k=1}^n X_k + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$$

- 4.c) On a pour $i < j$,

$$[X_i = 1] \cap [X_j = 1]$$

est réalisé si et seulement si les événements $[T_{k,i} = 0]$ pour $k < i$, $[T_{i,k} = 0]$ pour $k > i$, $[T_{k,j} = 0]$ pour $k < j$ et $k \neq i$, $[T_{j,k} = 0]$ pour $k > j$ sont réalisés. Or ces événements sont au nombre de $(n-1) + (n-2) = 2n-3$, indépendants et de probabilité $1-p$. D'où

$$\mathbf{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = (1-p)^{2n-3}.$$

De plus par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(Z_n^2) = n(1-p)^{n-1} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{E}(X_i X_j).$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_i X_j) &= \mathbf{P}([X_i X_j = 1]) \\ &= \mathbf{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) \\ &= (1-p)^{2n-3} \end{aligned}$$

et il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq n$, alors on a bien :

$$\mathbf{E}(Z_n^2) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}.$$

5. On remarque que $(1-p_n)^{n-1} \sim (1-p_n)^n$ car $1-p_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$. De plus

$$(1-p_n)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - c \frac{\ln(n)}{n}\right)\right).$$

Or,

$$n \ln\left(1 - c \frac{\ln(n)}{n}\right) = n \left(-c \frac{\ln(n)}{n} - c^2 \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right) \right),$$

d'où

$$n \ln\left(1 - c \frac{\ln(n)}{n}\right) = -c \ln(n) + o(1)$$

donc

$$(1-p_n)^n \sim n^{-c}.$$

6. Si $c > 1$, $\mathbf{E}(Z_n) \rightarrow 0$ car $\mathbf{E}(Z_n) \sim n^{1-c}$, quand $n \rightarrow +\infty$. D'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}([Z_n \geq 1]) \leq \mathbf{E}(Z_n),$$

d'où

$$\mathbf{P}([Z_n \geq 1]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et ainsi

$$\mathbf{P}([Z_n = 0]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

7. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à Z_n pour $\varepsilon = \mathbf{E}(Z_n)$:

$$\mathbf{P}(|Z_n - \mathbf{E}(Z_n)| \geq \mathbf{E}(Z_n)) \leq \frac{\mathbf{V}(Z_n)}{\mathbf{E}(Z_n)^2}$$

Or si $Z_n = 0$ alors

$$|Z_n - \mathbf{E}(Z_n)| \geq \mathbf{E}(Z_n),$$

donc

$$\mathbf{P}([Z_n = 0]) \leq \mathbf{P}(|Z_n - \mathbf{E}(Z_n)| \geq \mathbf{E}(Z_n))$$

et par transitivité,

$$\mathbf{P}([Z_n = 0]) \leq \frac{\mathbf{V}(Z_n)}{\mathbf{E}(Z_n)^2}.$$

D'après les questions précédentes,

$$\frac{\mathbf{V}(Z_n)}{\mathbf{E}(Z_n)^2} = \frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} + \frac{n-1}{n(1-p_n)} - 1.$$

Or $\frac{n-1}{n(1-p_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et si $c < 1$,

$$\frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d'où

$$\mathbf{P}([Z_n = 0]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$