



Thème : Révisions d'ECG1 Analyse



Exercice 1. ♦ Donner les développements limités à l'ordre 2 et $n \in \mathbb{N}$ de :

$$(1+x)^\alpha = \quad, \quad \frac{1}{1-x} = \quad, \quad e^x = \quad, \quad \ln(1+x) = \quad, \quad \cos(x) = \quad, \quad \sin(x) = \quad.$$

Exercice 2. ♦ **Sommes de Riemann**

RA32

Rappeler le principe des sommes de Riemann et le théorème. En déduire l'équivalent pour $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Exercice 3. ♦ **Constante γ d'Euler**

RA33

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln n.$$

• *Preuve par les développements limités*

1. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$. Déterminer un équivalent de v_n . En déduire la nature de la série de terme général v_n .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3. En déduire l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tel que $H_n = \gamma + \ln(n) + o(1)$.

• *Preuve 2 par les suites adjacentes*

On introduit en plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = H_n - \ln n$.

4. Justifier que pour tout $t \in]0; 1]$,

$$\ln(1+t) \leq t \quad \text{et} \quad t + \ln(1-t) \leq 0.$$

En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

5. Retrouver le résultat de la question 3.
6. Justifier que $|v_n - \gamma| \leq 1/n$. En déduire un programme python qui renvoie une approximation de γ à 10^{-5} -près.

>> Pour aller plus loin, EMLyon 2002 pour une expression intégrale de γ ou Ericome 2016, ex1. ♦

Exercice 4. ♦ **Égalité des accroissements finis**

RA34

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$ et ne s'annulant pas sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a) \frac{f'(c)}{f(c)}\right).$$

Exercice 5. ♦ **Nature d'une série de maximums**

D'après EMLyon 2011, partie IV # RA35

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n admet un maximum, noté M_n , et calculer M_n . On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mu_n = \sqrt{n} M_n \quad \text{et} \quad a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n.$$

2. Former le développement limité de a_n , à l'ordre 2 lorsque l'entier n tend vers l'infini.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$.
4. Établir que la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge et que sa limite est strictement positive.
5. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} M_n$?

Exercice 6. ♦♦ Développement limité et CCSA

adapté de Ecricome 2007 # RA36

1. Donner le DL est au voisinage de 0 à l'ordre 2 de $\ln(2 - e^x)$.
2. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2 - e^{1/k})$?
3. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{1/k}) \quad \text{et} \quad u_n = \exp V_n.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. a) Montrer que :

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right]$$

- b) Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2 - e^{1/k}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$.
- c) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

5. **Critère spécial des séries alternées**

On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k.$$

- a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont deux suites adjacentes.
- b) En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 7. ♦♦ Exemple de suite implicite

D'après EDHEC 2018, épreuve annulée # RA37

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x possède une seule solution, notée u_n .
2. a) Vérifier que u_n appartient à $]0; 1[$.
 b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
 c) Conclure que la suite $(u_n)_n$ converge et que sa limite appartient à $[0; 1]$.
 d) Montrer par l'absurde que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
 a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln v_n \sim_{+\infty} -n v_n$.
 b) Établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln v_n}{n v_n}\right)}{-\ln v_n} = 0 \quad \text{puis} \quad \ln v_n \sim_{+\infty} -\ln n.$$

- c) Montrer enfin que : $v_n \sim_{+\infty} \frac{\ln n}{n}$.
4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2 .

Exercice 8. ♦♦ Lemme de Cesàro et recherche d'équivalent

RA38

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle croissante qui converge vers un réel ℓ . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

1. On veut montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ .
 a) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)} \left(n a_{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k \right).$$

- b) Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.

c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité : $b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$.

d) Dédurre des deux questions précédentes que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ .

2. Montrer que le résultat précédent reste valide si l'on suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

On admet que le résultat trouvé dans les questions 1 et 2 reste valide si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone. On considère désormais la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}.$$

3. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. Soit β un réel non nul.

a) Établir l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \left(\left(1 + \frac{1}{u_n^3} \right)^\beta - 1 \right) \times u_n^\beta$$

b) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, déterminer un équivalent de $\left(\left(1 + \frac{1}{u_n^3} \right)^\beta - 1 \right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que la suite $(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie non nulle si et seulement si $\beta = 3$.

5. En posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_{n+1}^3 - u_n^3$, donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

Exercice 9. ♦♦ Fonction W de Lambert

D'après ESCP 2022, n13 # RA39

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

2. a) Montrer que la restriction de f à $[-1, +\infty[$ réalise une bijection sur un intervalle J qu'on déterminera. On note W la réciproque de cette bijection.

b) Déterminer $W(0)$ et $W'(0)$.

c) Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque x tend vers 0 et un équivalent de $W(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d) Tracer les courbes représentatives de f et W .

3. Montrer rapidement que la restriction de f à $] -\infty, -1[$ réalise une bijection sur un intervalle J' qu'on déterminera. On note V la réciproque de cette bijection.

4. Soit m , un réel.

a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $xe^x = m$.

Exprimer, lorsqu'elles existent, ces solutions à l'aide des fonctions W et V .

b) Soient a, b deux réels non nuls. Soit l'équation $e^{ax} + bx = 0$. Déterminer le nombre de solutions de cette équation en fonction de a et b . Exprimer, lorsqu'elles existent, ces solutions à l'aide des fonctions W et V .

5. Soit $x \in] -1/e; 0[$. On définit la suite w par

$$w_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = xe^{-w_n}.$$

a) Si la suite w est convergente, exprimer la limite à l'aide de la fonction V .

b) Donner un programme Python qui prend en argument n et renvoie w_n .

Exercice 10. ♦♦♦ Suites adjacentes

D'après HEC 2000 # RA40

Dans ce qui suit on suppose que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit M un majorant de K et a un élément de K . On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = M \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{u_n + v_n}{2}, v_n \right) & \text{si } \frac{u_n + v_n}{2} \text{ ne majore pas } K \\ \left(u_n, \frac{u_n + v_n}{2} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $K = [0, 1] \cup]3, 4[$, $a = 0$ et que $M = 10$. Déterminer (u_n, v_n) pour tout entier n appartenant à $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. On revient désormais au cas général.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

- b) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un réel b .
- c) Montrer que pour tout entier positif n , v_n est un majorant de K , puis que b majore K .
- d) Montrer qu'il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b .
- e) On suppose que b' est un majorant de K .
- Montrer que $b' \geq b$.
 - En déduire que b ne dépend pas des choix initiaux de a et M pourvu que a appartienne à K et que M majore K .

Exercice 11. ♦♦ Recherche d'extremum par trichotomie

RA41

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que f est strictement convexe, c'est-à-dire : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$, pour tout $\lambda \in]0, 1[$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

On suppose que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en un point α .

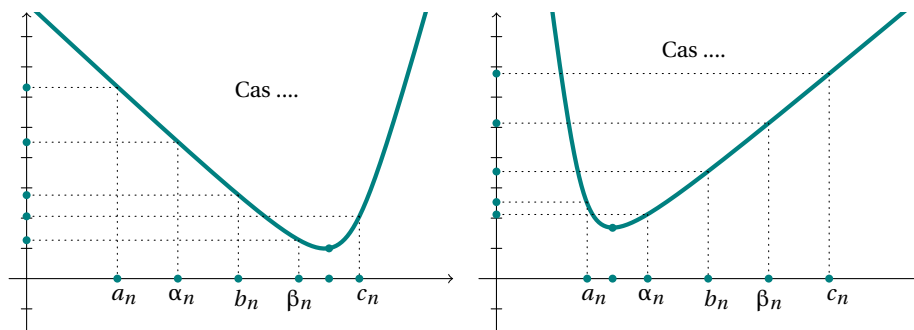
1. Justifier que le minimum de f n'est atteint qu'en α .
2. On définit trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) par récurrence :
 - On choisit des réels a_0, c_0 tels que $a_0 < c_0$ et tels qu'en posant $b_0 = \frac{a_0 + c_0}{2}$, on ait $f(b_0) \leq f(a_0)$, $f(b_0) \leq f(c_0)$.
 - Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsqu'on a construit a_n, b_n, c_n , on pose

$$\alpha_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad \beta_n = \frac{b_n + c_n}{2}$$

et on considère trois cas :

- Cas 1 : si $f(\alpha_n) < f(b_n)$, on pose $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \alpha_n$ et $c_{n+1} = b_n$;
- Cas 2 : si $f(\alpha_n) \geq f(b_n)$ et $f(\beta_n) < f(b_n)$, on pose $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = \beta_n$ et $c_{n+1} = c_n$;
- Cas 3 : sinon, on pose $a_{n+1} = \alpha_n$, $b_{n+1} = b_n$ et $c_{n+1} = \beta_n$.

Dans chacun des graphes suivants, préciser dans quel cas l'on se situe.



3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < c_n$, $b_n = \frac{a_n + c_n}{2}$ et $f(b_n) \leq f(a_n)$ et $f(b_n) \leq f(c_n)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha \leq c_n$.
5. Justifier que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, et qu'elles convergent vers α .
6. Écrivons un programme Python afin d'étudier $f : x \mapsto e^{2x} + e^{-x} + 2x$.
On vérifie que f est continue, strictement convexe, et admet un unique minimum atteint en α .
 - a) Écrire un programme Python suivant qui définit la fonction f .
 - b) En déduire une seconde fonction qui prend en arguments a_0, c_0 et un nombre $\varepsilon > 0$, et qui renvoie une approximation de α à ε près.

III Sommes de Riemann

Définition 20 (Sommes de Riemann à pas constant)

Soient f une fonction continue sur $[a; b]$ et n un entier naturel non nul. Une somme de Riemann associée à f sur $[a; b]$ est une somme de la forme

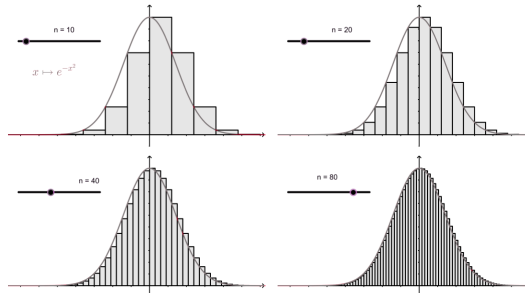
$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Théorème 21 (Convergence des sommes de Riemann)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. La suite $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et la limite est

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

S_n correspond à la somme des aires (algébriques) des rectangles. En conséquence, S_n est une approximation de l'aire sous la courbe, c'est-à-dire l'intégrale de f entre a et b . On conjecture que cette approximation est d'autant meilleure que n est grand. En effet, en augmentant le nombre de rectangles, on peut épouser plus facilement la courbe.



Méthode. Comment reconnaître une somme de Riemann ?

En pratique, on choisit $a = 0$, $b = 1$. Le théorème devient pour une fonction f continue sur $[0; 1]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Par exemple, pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on considère la fonction continue $t \in [0; 1] \mapsto t^\alpha$. Par suite,

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{n-1} k^\alpha = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^\alpha dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Remarque. Nous pouvons tester notre résultat en rappelant :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Ainsi, pour $\alpha = 1, 2$ et 3 :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n+1(2n+1)}{6n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}.$$

⚠ Attention. Il faudra être précis, on n'applique pas le résultat précédent pour $\alpha < 0$. En effet, bien que pour $\alpha \in]-1, 0[$ l'intégrale $\int_0^1 t^\alpha dt$ ait un sens comme limite, on ne peut pas appliquer le théorème : la fonction n'est pas continue sur $[0; 1]$ (fermé en 0).

Une variante du cahier d'été

Exercice 1  *Série, constante d'Euler* On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

- 1) a) Étudier la convergence de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$.
- b) En déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- c) Justifier l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

- 2) Étudier pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de la série $\sum \alpha^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}$.

- 1) a) À partir du développement limité du logarithme en 0, on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \Rightarrow a_n - a_{n-1} &\sim \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $a_n - a_{n-1}$ converge.

- b) Si on note S_n la somme partielle d'ordre n de cette série, on a par télescopage

$$S_n = \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_1.$$

Par conséquent, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi.

- c) Notons γ , la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On a donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \gamma + o(1).$$

D'où le résultat sachant que

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(1).$$

- 2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Justifions l'équivalent $\alpha^{H_n} \sim \alpha^\gamma \cdot \alpha^{\ln(n)}$.

$$\frac{\alpha^{H_n}}{\alpha^\gamma \cdot \alpha^{\ln(n)}} = \alpha^{H_n - (\gamma + \ln(n))} = \alpha^{o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et

$$\alpha^{\ln(n)} = e^{\ln(\alpha) \ln(n)} = n^{\ln(\alpha)}.$$

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, les séries $\sum \alpha^{H_n}$ et $\sum n^{\ln(\alpha)}$ ont même nature. Or, $\sum n^{\ln(\alpha)}$ est une série de Riemann convergente si et seulement si $\ln(\alpha) < -1$, c'est-à-dire, $\alpha < e^{-1}$.

La série $\sum \alpha^{H_n}$ converge si et seulement si $\alpha < e^{-1}$.

• Précisons que f est de signe constant sur $[a, b]$. En effet, si cela n'est pas le cas, le *théorème des valeurs intermédiaires* permet de justifier que f s'annule au moins un fois. Ce cas est exclu par hypothèse sur f . En particulier, $|f|$ est strictement positive et dérivable sur $[a, b]$. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = \ln(|f(x)|)$. Par composition, g une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Le *théorème des accroissements finis* s'applique, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c), \quad \text{donc} \quad \frac{\ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|)}{b - a} = f'(c) \cdot \frac{1}{f(c)}.$$

Comme f est de signe constant $|f(b)|/|f(a)| = f(b)/f(a)$, et

$$\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b - a) \frac{f'(c)}{f(c)}, \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b - a) \frac{f'(c)}{f(c)}\right)}.$$

Remarque

Expliquons comment trouver la fonction g .

On cherche une transformation qui permette d'utiliser le *théorème des accroissements finis*. Pour passer du quotient $\frac{f(b)}{f(a)}$ à $g(b) - g(a)$, on pose $g = \ln \circ f$. Si une telle égalité est vraie et si la composition avec $\ln$ est licite,

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b - a) \frac{f'(c)}{f(c)}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b - a) \frac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \frac{\ln(f(b)) - \ln(f(a))}{b - a} = \frac{f'(c)}{f(c)} = (\ln \circ f)'(c).$$

Partie IV : Nature d'une série de maximums

Source
jfcossutta

1 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $g'_n(x) = \frac{1}{n!} (n x^{n-1} e^{-x} + x^n (-e^{-x}))$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, g'_n(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1} e^{-x} (n - x).$$

g_n est continue sur $[0, +\infty[$, $\forall x \in [0, n[$, $g'_n(x) > 0$ et $\forall x \in [n, +\infty[$, $g'_n(x) < 0$.

Ceci suffit pour dire que g_n est strictement croissante sur $[0, n]$ et strictement décroissante sur $[n, +\infty[$.

Donc $\forall x \in [0, n[$, $g_n(x) < g_n(n)$ et $\forall x \in [n, +\infty[$, $g_n(x) > g_n(n)$ et ainsi $\forall x \in [0, n[\cup]n, +\infty[$, $g_n(x) < g_n(n)$.

Dans ces conditions, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ atteint en le seul point n .

$$g_n \text{ admet un maximum } M_n \text{ sur } [0, +\infty[\text{ atteint en le seul point } n. M_n = g_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}.$$

2 Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

$$a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n = \ln(\sqrt{n+1} M_{n+1}) - \ln(\sqrt{n} M_n) = \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{M_{n+1}}{M_n}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{M_{n+1}}{M_n}\right).$$

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = M_{n+1} \frac{1}{M_n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{n!}{n^n e^{-n}} = \frac{(n+1)^n e^{-(n+1)}}{e^{-n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^n} e^{-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1}. \text{ Alors :}$$

$$a_n = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{M_{n+1}}{M_n}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right).$$

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} - 1 = n \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right].$$

$$1 + \frac{1}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \text{ Par produit :}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \text{ Alors :}$$

$$a_n = n \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3 Il résulte de **2** que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. De plus la série de terme général $\frac{1}{12n^2}$ est convergente et à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que :

la série de terme général a_n converge.

4 Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

$$\forall n \in [2, +\infty[, \ln \mu_n - \ln \mu_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln \mu_{k+1} - \ln \mu_k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \quad \forall n \in [2, +\infty[, \ln \mu_n = \ln \mu_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \mu_n = \ln \mu_1 + S$ et ainsi la suite $(\ln \mu_n)_{n \geq 1}$ est convergente. Notons ℓ sa limite.

Par continuité de la fonction exponentielle en ℓ , $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln \mu_n} = e^\ell$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = e^\ell$. Ainsi :

la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge et sa limite est strictement positive.

5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = e^\ell$ et $e^\ell \neq 0$ donc $\mu_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell$. Ce qui donne $\sqrt{n} M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell$. Ainsi $M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^\ell}{\sqrt{n}}$.

De plus la série de terme général $\frac{e^\ell}{n^{\frac{1}{2}}}$ est divergente, car $\frac{1}{2} \leq 1$, et à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que :

la série de terme général M_n diverge.

SOLUTION DU SUJET N° 13

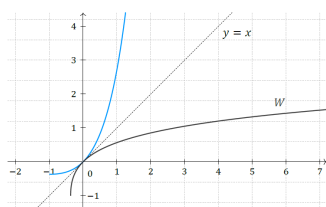
Source ESCP

- D'une part f est continue. D'autre part, comme $f'(x) = (x+1)e^x$, la fonction f est strictement décroissante donc bijective de $] -\infty, -1]$ sur $]0, -1/e]$. Et f est strictement croissante donc bijective de $[-1, +\infty[$ sur $[-1/e, +\infty[$.
- (a) La restriction de f à $[-1, +\infty[$ réalise une bijection sur $[-1/e, +\infty[$, car f y est strictement croissante. On note W la réciproque de cette bijection.
(b) On a $f(0) = 0$, donc $W(0) = 0$. Ensuite comme $f'(0) = 1$, le théorème de dérivation des fonctions réciproques s'applique en 0 et $W'(0) = \frac{1}{f'(W(0))} = 1$.
- (c) En 0, on a $W(x) = W(0) + xW'(0) + o(x)$ soit $W(x) \sim x$.
Au voisinage de $+\infty$, comme $W(x) > 0$, on écrit

$$x = f(W(x)) = W(x)e^{W(x)} \Rightarrow W(x) + \ln W(x) = \ln x$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = +\infty$; donc $\ln W(x) = o(W(x))$ et $W(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$.

- (d) Pour obtenir le graphe de W , il suffit de faire la symétrie par rapport à l'axe $y = x$.



- La fonction f est strictement décroissante de $] -\infty, -1]$ sur $]0, -1/e]$. C'est donc une bijection de réciproque notée V .

4a On s'aide de la représentation graphique

- si $m \in] -\infty, -1/e[$, il n'y a pas de solution.
- si $m = -1/e$, il y a une unique solution $W(m)$.
- si $m \in] -1/e, 0[$, il y a deux solutions $W(m)$ et $V(m)$.
- si $m = 0$, une seule solution $x = 0 = W(0)$
- si $m > 0$, il y a une unique solution $W(m)$.

4b L'équation $e^{ax} + bx = 0$ est équivalente à l'équation $-axe^{-ax} = \frac{a}{b}$, soit $f(-ax) = \frac{a}{b}$.

On est revenu à l'équation précédente avec $m = \frac{a}{b}$ et x remplacé par $-ax$. Ainsi :

- si $a/b \in] -\infty, -1/e[$, il n'y a pas de solution.
- si $a/b = -1/e$, il y a une unique solution $-ax = W(a/b)$, soit $x = -\frac{1}{a}W(a/b)$.
- si $a/b \in] -1/e, 0[$, il y a deux solutions $W(a/b)$ et $V(a/b)$ et $x = -\frac{1}{a}W(a/b)$, $x = -\frac{1}{a}V(a/b)$.
- si $a/b > 0$, il y a une unique solution $x = -\frac{1}{a}W(a/b)$.

5a On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1}e^{w_n} = x$$

On suppose qu'il existe une limite ℓ . Par passage à la limite sachant que la fonction exponentielle est continue

$$\ell e^\ell = x$$

Soit $f(\ell) = x$. Comme $x \in] -\infty, -1[$, il vient $\ell = V(x)$.

Ainsi, on peut obtenir une approximation de $V(x)$ avec w_n avec n "grand".

5b

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
def Lambert(n,x):
    w=x # initialisation
    for i in range(n):
        w=x*np.exp(-w)
    return w
```

```
>>> Lambert(10,1)
0.5684287250290607
```

p1

(Q1) $K \subset \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $a=0$ et $\pi \neq 0$. Ainsi $u_0^2 v_0 = 10$.

$u_1 v_1 = 5$ major K donc $u_1, v_1 > 0$ et $u_1 v_1 = 5$. $u_2 v_2 = 2$ et $u_2, v_2 > 0$.

$u_3 v_3 = \frac{2}{3}$ ne major K donc $u_3, v_3 < 0$ et $u_3 v_3 = \frac{2}{3}$. $u_4 v_4 = \frac{1}{2}$ et $u_4, v_4 > 0$.

$u_5 v_5 = \frac{915}{1000}$, $\frac{15}{16}$ ne major K donc $u_5, v_5 < 0$ et $u_5 v_5 = \frac{15}{16}$. $u_6 v_6 = \frac{11}{16}$ et $u_6, v_6 > 0$.

$u_7 v_7 = \frac{1415}{1000}$, $\frac{35}{48}$ major K donc $u_7, v_7 > 0$ et $u_7 v_7 = \frac{35}{48}$. $u_8 v_8 = \frac{15}{16}$ et $u_8, v_8 < 0$.

et pour le même raisonnement : $u_9 v_9 = \frac{15}{16}$, $u_{10} v_{10} = \frac{15}{16}$, $u_{11} v_{11} = \frac{15}{16}$, $u_{12} v_{12} = \frac{15}{16}$, $u_{13} v_{13} = \frac{15}{16}$, $u_{14} v_{14} = \frac{15}{16}$.

$u_{15} v_{15} = \frac{15}{16}$, $u_{16} v_{16} = \frac{15}{16}$, $u_{17} v_{17} = \frac{15}{16}$, $u_{18} v_{18} = \frac{15}{16}$, $u_{19} v_{19} = \frac{15}{16}$, $u_{20} v_{20} = \frac{15}{16}$.

Noter que $u_{20} v_{20} = 4,001$ et $u_{21} v_{21} = 4,0000006$ et $u_{22} v_{22} = 4,0000006$.

(Q2) a) et b) soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\frac{u_n v_n}{n}$ ne major K . Alors $u_{n+1} v_{n+1} < \frac{u_n v_n}{n}$.

Ainsi $u_{n+1} v_{n+1} < \frac{u_n v_n}{n}$, $u_{n+1} v_{n+1} < 0$ et $u_{n+1}, v_{n+1} < 0$.

Supposons que $\frac{u_{n+1} v_{n+1}}{n+1}$ major K . Alors $u_{n+1} v_{n+1} > \frac{u_n v_n}{n}$.

Ainsi $u_{n+1} v_{n+1} > \frac{u_n v_n}{n}$, $u_{n+1} v_{n+1} > 0$ et $u_{n+1}, v_{n+1} > 0$.

donc les 2 cas : $u_{n+1} v_{n+1} = \frac{u_n v_n}{n}$ ou $u_{n+1} v_{n+1} = \frac{u_n v_n}{n+1}$ et

$u_{n+1} v_{n+1} \in \{0, \frac{u_n v_n}{n}\}$.

(u_n, v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{n}$ et de premier

terme $u_0 v_0 = a \cdot \pi$. $u_n v_n = \frac{a \cdot \pi}{n^n}$.

p2

a) K est π major K donc $a \cdot \pi < 0$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n, v_n < 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} v_{n+1} < 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}, v_{n+1} \in \{0, \frac{u_n v_n}{n}\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}, v_{n+1} < 0$.

(u_n, v_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}, v_{n+1} \in \{0, \frac{u_n v_n}{n}\} \subset]-\infty, 0]$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}, v_{n+1} < 0$.

(u_n, v_n) est décroissante.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \pi}{n^n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = 0$.

Ainsi (u_n, v_n) est un couple de suites adjacentes.

Alors (u_n, v_n) et (v_n, u_n) ont deux limites consécutives qui se laissent à b .

c) et d) Notons par récurrence que pour tout n donné, $\exists x_n \in K$, $u_n \leq x_n$ et $v_n \leq x_n$.

→ est vrai pour $n=0$ (suffit de poser $x_0 = u_0 = 0$).

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

→ Soit $u_{n+1} v_{n+1} = \frac{u_n v_n}{n+1}$ ne major K . Alors $u_{n+1}, v_{n+1} < 0$ et par un

majorant de K , $\exists x_{n+1} \in K$, $u_{n+1} < x_{n+1}$; $u_{n+1} < x_{n+1}$!

et plus $v_{n+1} = u_{n+1}$ major K d'après l'hypothèse de récurrence.

→ Soit $u_{n+1} v_{n+1} = \frac{u_n v_n}{n}$ major K . Alors $u_{n+1}, v_{n+1} > 0$, $\exists x_{n+1} \in K$, $u_{n+1} \leq x_{n+1}$.

Noter $x_{n+1} = u_{n+1}$, $x_{n+1} \in K$ et $u_{n+1} \leq x_{n+1}$. Or $u_{n+1} = \frac{u_n v_n}{n}$

et $u_{n+1} > 0$ major K .

Ainsi s'achève la récurrence.

Donc tout élément x de $\mathbb{R}$, u_n et v_n est un majorant de K .

p3

Introduisons b tel que K . $\forall n \in \mathbb{N}$, $b \leq v_n$. En fait on a b tel que $b \leq b$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $b \leq b$. b major K .

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in K$, $u_n \leq x_n$.

Noter $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq x_n \leq v_n$ (K major K). Comme $b \leq u_n \leq b$, on

aura $x_n = b$ pour tout n .

Il y a donc une suite d'éléments de K qui converge vers b .

a) soit b un majorant de K . $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq b$.

En fait on a b tel que $b \leq b$.

Il y a donc une suite d'éléments de K qui converge vers b .

Montrons que b est le plus petit majorant de K . $b = \sup K$ (le plus petit majorant de K).

Noter b est un élément de K et il n'y a pas de majorant de K .

Considérons les suites (u_n, v_n) et (v_n, u_n) définies par :

$u_0 = 0, v_0 = \pi$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_{n+1}, v_{n+1}) = \left(\frac{u_n v_n}{n+1}, \frac{u_n v_n}{n} \right)$ et $(v_{n+1}, u_{n+1}) = \left(\frac{u_n v_n}{n}, \frac{u_n v_n}{n+1} \right)$ pour

Montrons que ces suites sont des suites de Cauchy.

b major K et b est un majorant de K donc $b \geq b$.

Ainsi $b \geq b$ car b major K et $b \geq b$ car b major K . $b = b$.

b est le plus petit majorant de K et b est un majorant de K donc $b = b$.

b est le plus petit majorant de K et b est un majorant de K donc $b = b$.

PARTIE II Étude d'un exemple

(Q1) $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est surjectif et continu sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

Soit $(u_n, v_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\varphi(u_n, v_n) > 0$.

Il faut vérifier que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\exists (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\varphi(u, v) = (x, y)$.

Commentaire. L'exercice est une variante de l'algorithme de dichotomie. Au lieu de chercher une approximation du zéro d'une fonction, on cherche une approximation de la valeur en laquelle le minimum est atteint.

Notons que si f est dérivable et que f' peut s'exprimer facilement, on peut justement déterminer α par dichotomie. En effet, α est un zéro de f' .

1. Notons $m = \min_{\mathbb{R}} f = f(\alpha)$. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta \neq \alpha$. On sait que $f(\beta) \geq m$, et on veut montrer que $f(\beta) > m$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(\beta) = m$. Alors, en posant $\gamma = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, on a, par stricte convexité de f :

$$f(\gamma) < \frac{1}{2}f(\alpha) + \frac{1}{2}f(\beta) = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = m.$$

Ainsi $f(\gamma) < \min_{\mathbb{R}} f$: c'est une contradiction. On a donc $f(\beta) > m$: le minimum ne peut pas être atteint en β quand $\beta \neq \alpha$.

2. Le graphe de gauche correspond au cas 2, celui de droite au cas 1.

3. On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}(n) : a_n < c_n, \quad b_n = \frac{a_n + c_n}{2} \quad \text{et} \quad f(b_n) \leq f(a_n), \quad f(b_n) \leq f(c_n).$$

• **Initialisation.** La propriété $\mathcal{P}(0)$ est immédiatement vérifiée, par choix de a_0, b_0, c_0 .
• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée.

Comme $a_n < b_n < c_n$, on a $a_n < \alpha_n < b_n < \beta_n < c_n$; il reste à vérifier dans chacun des cas qu'on a à chaque fois les inégalités voulues.

Faisons par exemple le cas 3 : dans ce cas, on a $f(\alpha_n) \geq f(b_n)$ et $f(\beta_n) \geq f(b_n)$. Comme on pose $a_{n+1} = \alpha_n$, $b_{n+1} = b_n$ et $c_{n+1} = \beta_n$, on obtient directement $a_{n+1} < c_{n+1}$, $f(a_{n+1}) \geq f(b_{n+1})$ et $f(c_{n+1}) \geq f(b_{n+1})$. De plus, puisque par hypothèse de récurrence $b_n = \frac{a_n + c_n}{2}$:

$$\frac{a_{n+1} + c_{n+1}}{2} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} = \frac{\frac{a_n + b_n}{2} + \frac{b_n + c_n}{2}}{2} = \frac{b_n + \frac{a_n + c_n}{2}}{2} = \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

Cela montre la propriété voulue dans le cas 3. On étudie de même les autres cas.

• **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde.

Supposons que $\alpha < a_n$. Alors $\alpha < a_n < b_n$, donc il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $a_n = \lambda\alpha + (1 - \lambda)b_n$ (on prend $\lambda = \frac{b_n - a_n}{b_n - \alpha}$). Par stricte convexité de f :

$$f(a_n) < \lambda f(\alpha) + (1 - \lambda)f(b_n).$$

Or $f(\alpha) \leq f(b_n)$ (car f présente son minimum en α), donc

$$\lambda f(\alpha) + (1 - \lambda)f(b_n) \leq \lambda f(b_n) + (1 - \lambda)f(b_n) = f(b_n).$$

Ainsi $f(a_n) < f(b_n)$, ce qui contredit la question précédente.

Il est donc impossible que $\alpha < a_n$. On montre de même qu'il est impossible que $\alpha > c_n$, et on conclut : $a_n \leq \alpha \leq c_n$.

5. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n - a_n \geq 0$.

On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n) : c_n - a_n = \frac{c_0 - a_0}{2^n}$.

• **Initialisation.** La propriété $\mathcal{H}(0)$ est immédiate.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$ vérifiée.

Dans le cas 1, on a : $c_{n+1} - a_{n+1} = b_n - a_n = \frac{a_n + c_n}{2} - a_n = \frac{c_n - a_n}{2}$, donc avec

$$\text{l'hypothèse de récurrence, } c_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{c_0 - a_0}{2^n} = \frac{c_0 - a_0}{2^{n+1}}.$$

Dans le cas 2, $c_{n+1} - a_{n+1} = c_n - b_n = c_n - \frac{a_n + c_n}{2} = \frac{c_n - a_n}{2} = \frac{c_0 - a_0}{2^{n+1}}$.

Dans le cas 3, $c_{n+1} - a_{n+1} = \beta_n - \alpha_n = \frac{b_n + c_n}{2} - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{c_n - a_n}{2} = \frac{c_0 - a_0}{2^{n+1}}$.

Dans tous les cas, $\mathcal{H}(n+1)$ est vérifiée.

• **Conclusion.** Ceci clôt la récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

• Une récurrence facile, où l'on examine comme précédemment les trois cas dans l'hérédité, permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$ et $c_{n+1} \leq c_n$. Ainsi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• Comme $\frac{c_0 - a_0}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on applique le *théorème d'encadrement* au résultat de la question précédente : on sait alors que $c_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On peut conclure que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

On sait alors qu'elles convergent vers une même limite ℓ . Or d'après la question 4 : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \alpha \leq c_n$, donc en passant à la limite : $\ell \leq \alpha \leq \ell$, et ainsi $\ell = \alpha$.

6.a)

```
def fonction(x):
    ex=np.exp(x)
    return ex**2+1/ex+2*x
```

6.b)

```
def approx_alpha(a0, c0, eps):
    a = a0
    c = c0
    b = (a + c) / 2

    while c - a > eps:
        alpha = (a + b) / 2
        beta = (b + c) / 2

        if f(alpha) < f(b):
            c = b
            b = alpha
        elif f(beta) < f(b):
            a = b
            b = beta
        else:
            a = alpha
            c = beta
            b = (a + c) / 2

    return (a + c) / 2
```