



Thème : Révisions ECG1 Algèbre



Exercice 1. ♦ Sommes de projecteurs

CA76

1. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . On définit la trace de φ par

$$\text{Tr}(\varphi) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)).$$

Justifier que la trace de φ ne dépend pas du choix de la base.

2. a) Soit p un projecteur de E , démontrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.
 b) En déduire que $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$.
 c) Soit s un endomorphisme de E . Montrer que si s est une somme finie de projecteurs p_i , avec $i \in [1, m]$, alors

$$\text{Tr}(s) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \text{Tr}(s) \geq \text{rg}(s).$$

>> Pour aller plus loin, voir exercice 3, EDHEC 2020

Exercice 2. ♦ Endomorphisme sur un espace fonctionnel

CA77

Dans la suite, on définit les fonctions sinus et cosinus hyperbolique par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \text{Vect}(\sin, \cos, \text{sh}, \text{ch})$ et d l'endomorphisme de E : $d(f) = f'$ (dérivation).

1. Donner la dimension de F . Démontrer que F est stable par d . On note φ l'endomorphisme de F induit par d .
 2. Écrire la matrice M de φ dans une base bien choisie de F . Calculer M^n pour tout naturel n .
 3. Démontrer que φ est un endomorphisme bijectif de F et calculer M^{-1} .

Exercice 3. ♦♦ Noyaux itérés et décomposition de Fitting

CA78

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$ et $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$.
 2. a) Démontrer que si $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})$, alors $\text{Ker}(f^{k+1}) = \text{Ker}(f^{k+2})$.
 b) Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :
 — si $k < p$, alors $\text{Ker}(f^k) \neq \text{Ker}(f^{k+1})$;
 — si $k \geq p$, alors $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})$.
 c) Démontrer que $p \leq n$.
 3. Démontrer que si $k < p$, alors $\text{Im}(f^k) \neq \text{Im}(f^{k+1})$ et si $k \geq p$, alors $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$.
 4. En déduire que

$$\text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p) = E.$$

5. ♦♦♦ Facultatif

Démontrer qu'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que F et G sont supplémentaires, la restriction de f à F , notée $f|_F$, est nilpotent et la restriction de f à G , notée $f|_G$, induit un isomorphisme de G .

6. Soit $d_k = \dim(\text{Im}(f^k))$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 On pourra introduire l'application

$$g_k : \begin{cases} \text{Im } f^k & \rightarrow & \text{Im } f^k \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

et établir :

$$d_{k+1} - d_k = \dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f^k.$$

Exercice 1

p. 1

CA76

1. Soient B et $\mathcal{C}$ deux bases de E . Par la formule de changement de bases

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) P^{-1}$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Puis

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) &= \text{Tr}(P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) P^{-1}) \\ &= \text{Tr}(P^{-1} P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)) \\ &= \text{Tr}(I_n \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)) \\ \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) &= \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)). \end{aligned}$$

La trace ne dépend donc pas du choix de base.

- 2a Soit $x \in E$. On a

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Imp}} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in \text{Ker } p} \quad \text{car } p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$$

D'où $E = \text{Imp} + \text{Ker } p$.

De plus, par la formule du rang.

$$\dim \text{Imp} + \dim \text{Ker } p = \dim E.$$

Ce qui conduit par la caractérisation des supplémentaires.

- 2b Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $\text{Ker } p \oplus \text{Imp} = E$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} \dots & 0 \\ & 1 & \dots \\ & 0 & \dots \\ & & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d'où } \text{Tr}(p) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)) = \dim \text{Imp} = \text{rg } p.$$

On rappelle que la trace d'un endomorphisme est la trace de la matrice de p dans une base (et cela ne dépend pas du choix de la base).

- 2c On a $s = \sum_{i=1}^m p_i$ et par linéarité de la trace

$$\text{tr}(s) = \sum_{i=1}^m \text{tr}(p_i) \in \mathbb{N}.$$

On montre que pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$ $\text{Im } f + g \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ d'où $\text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$. Par récurrence, cela s'étend à m endomorphismes et

$$\text{rg}(s) \leq \sum_{i=1}^m \text{rg}(p_i) = \sum_{i=1}^m \text{tr}(p_i) = \text{tr}(s).$$

Exercice 3

p. 1

CA78

Indication

- Suivre les définitions.
- Écrire $f^{k+2}(x) = f^{k+1}(f(x))$
 - Minorer la dimension de $\ker(f^k)$ si cet entier p n'existe pas.
 - Même preuve.
- Théorème du rang.
- Théorème du rang + $\ker(f^{2p}) = \ker(f^p)$.
- F et G sont donnés par la question précédente.
- Prouver que $d_k - d_{k+1} = \dim(\ker(f) \cap \text{Im}(f^k))$.

Corrigé

- Si $x \in \ker(f^k)$, alors $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ et donc $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$. De même, si $y \in \text{Im}(f^{k+1})$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$ et donc $y \in \text{Im}(f^k)$.
- Bien sûr, il suffit de prouver que $\ker(f^{k+2}) \subset \ker(f^{k+1})$. Mais si $x \in \ker(f^{k+2})$, alors $0 = f^{k+2}(x) = f^{k+1}(f(x))$. On a donc $f(x) \in \ker(f^{k+1})$ et donc $f(x) \in \ker(f^k)$. Ceci implique $f^{k+1}(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker(f^{k+1})$.
 - Supposons qu'il n'existe pas d'entiers k tel que $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$. Ceci signifie que pour chaque entier k , l'inclusion $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ est stricte, et en particulier, on a

$$\dim(\ker(f^{k+1})) \geq \dim(\ker(f^k)) + 1.$$

On en déduit que pour tout entier k , on a $\dim(\ker(f^k)) \geq k$. Mais ceci n'est pas possible, puisque la dimension de $\ker(f^k)$ est majorée par n . On définit alors p comme le plus petit entier des entiers k tels que $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$. Grâce au résultat de la question précédente, on a bien $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$ si $k \geq p$.

2.3. Le raisonnement de la question précédente donne en fait immédiatement que $p \leq n$. En effet, on a prouvé que pour tout $k \leq p$, on a $\dim(\ker(f^k)) \geq k$, et donc en

particulier on a $n \geq \dim(\ker(f^p)) \geq p$.

3. Ceci résulte immédiatement du théorème du rang et de la définition de p . En effet, si $k < p$, alors $\dim(\ker(f^k)) \neq \dim(\ker(f^{k+1}))$ et donc $\dim(\text{Im}(f^k)) \neq \dim(\text{Im}(f^{k+1}))$. De même, si $k \geq p$, on a $\dim(\ker(f^k)) = \dim(\ker(f^{k+1}))$ et donc $\dim(\text{Im}(f^k)) = \dim(\text{Im}(f^{k+1}))$. Comme on sait déjà que $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$, ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux.

4. Par le théorème du rang, il suffit de prouver que $\ker(f^p) \cap \text{Im}(f^p) = \{0\}$. Soit $y \in \ker(f^p) \cap \text{Im}(f^p)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^p(x)$. On sait aussi que $f^p(y) = f^{2p}(x) = 0$, et donc $x \in \ker(f^{2p})$. Mais par définition de p , on a $\ker(f^{2p}) = \ker(f^p)$ et donc $x \in \ker(f^p)$. Ceci entraîne $y = 0$ et le résultat.

5. On va poser $F = \ker(f^p)$ et $G = \text{Im}(f^p)$. On commence par remarquer que F est stable par f . En effet, si $x \in F$, alors $f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = 0$ et donc $f(x) \in F$. Bien sûr, $f|_F$ est nilpotent puisque, pour tout $x \in F$, $f^p(x) = 0$. Posons ensuite $g = f|_G$. Remarquons d'abord que g est bien un endomorphisme de G , puisque $g(\text{Im}(f^p)) = \text{Im}(f^{p+1}) \subset G$. De plus, g est injective car $\ker(f) \cap \text{Im}(f^p) \subset \ker(f^p) \cap \text{Im}(f^p) = \{0\}$. Ainsi, g est un automorphisme de G (qui est de dimension finie).

6. Soit k un entier naturel et g_k la restriction de f à $\text{Im}(f^k)$. Alors d'après le théorème du rang, on a

$$d_k = \dim(\text{Im}(f^k)) = \dim(\ker(g_k)) + \dim(\text{Im}(g_k)).$$

Mais $\text{Im}(g_k) = g_k(\text{Im}(f^k)) = f(\text{Im}(f^k)) = \text{Im}(f^{k+1})$. Ainsi, on a :

$$d_k - d_{k+1} = \dim(\ker(g_k)).$$

Mais $g_k = f|_{\text{Im}(f^k)}$ et donc $\ker(g_k) = \ker(f) \cap \text{Im}(f^k)$. Puisque la suite $\text{Im}(f^k)$ est décroissante (pour l'inclusion), on en conclut qu'il en est de même pour $\ker(g_k)$ et donc que la suite $(d_k - d_{k+1})$ est décroissante.