



Thème : Révisions ECG1 Probabilités



Exercice 1. ♦♦♦ On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée. Les faces sont numérotées 0 et 1. On lance indéfiniment la pièce de monnaie et on note X_i le résultat du i -ème lancer. On se fixe une séquence $s = (s_1, s_2, \dots, s_k) \in \{0, 1\}^k$ de longueur k . On veut montrer que cette séquence apparaît dans la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1. # RVA63

On définit les événements :

- A : « La suite s apparaît une infinité de fois » ;
- pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i : « La suite s apparaît au moins une fois à partir du $(k \times i + 1)$ -ième lancer ;
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, $B_j = \bigcap_{m=1}^k [X_{kj+m} = s_m]$.

1. Justifier que $A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$.

Indication. On pourra raisonner par double inclusion sur les complémentaires.

2. En déduire $\mathbf{P}(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

3. Montrer que $\bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j \subset A_i$.

4. Soit $i \in \mathbb{N}$, on pose $C_i = \bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j$. On veut montrer que $\mathbf{P}(C_i) = 1$.

a) Montrer que les événements $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants.

b) Déterminer, pour $n \geq i$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=i}^n \overline{B_j}\right)$.

c) En déduire que $\mathbf{P}(C_i) = 1$

5. Montrer que la séquence s apparaît dans la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

Exercice 2. ♦♦♦ Exemple de convergence presque-sûr

Oral ESCP 2022, sujet 37 # RVA64

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\lambda_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n^2}$.

1. a) Déterminer un équivalent de $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire que la série de terme général λ_n converge.

2. Dans la suite de l'exercice, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ définies sur cet espace, indépendantes et telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre λ_n .

a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(X_n \neq 0)$ converge.

b) Soit $(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(E_i).$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n \geq N} [X_n \neq 0]\right) = 0$.

d) En déduire que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{N \geq 1} \left(\bigcap_{n \geq N} [X_n = 0]\right)\right) = 1$.

e) On note $B = \left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{n \geq 1} X_n(\omega) \text{ converge} \right\}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} X_n$ converge presque sûrement, c'est-à-dire que $\mathbf{P}(B) = 1$.

On suppose désormais que $B = \Omega$. Ainsi la fonction $S = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ est définie sur Ω . On admet que c'est une variable aléatoire.

3. Déterminer la limite en loi de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ avec $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

4. Déterminer la limite en probabilité de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

Séries de pile et face

- 1) D'après les lois de De Morgan, il suffit d'établir $\bar{A} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i$. Procédons par double inclusion.

⊆ Soit $\omega \in \bar{A}$. Alors la séquence s apparaît un nombre fini de fois. Soit j le rang de la dernière apparition de s , 1 si s n'apparaît jamais. On a $\omega \in \bar{A}_j$. Donc $\omega \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i$.

⊇ Soit $\omega \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i$. Il existe un indice j tel que $\omega \in \bar{A}_j$. Donc toutes les apparitions de s se font avant le $(k \times j + 1)$ -ième lancer. On a au plus $(k \times j + 1)$ apparitions de s . Ainsi $\omega \in \bar{A}$.

- 2) La suite (A_i) est une suite décroissante : si $\omega \in A_{i+1}$ alors s apparaît au moins une fois après le $(k(i+1)+1)$ -ième lancer. Cette apparition se fait après le $(k \times i + 1)$ -ième lancer. Donc $\omega \in A_i$. D'où $A_{i+1} \subset A_i$. D'après le théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

- 3) Soit $\omega \in \bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j$, alors, il existe $j \geq i$ tel que $\omega \in B_j$. Donc la séquence est réalisée à partir du lancer $kj + 1 \geq ki + 1$. Donc $\omega \in A_i$. On a montré

$$\bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j \subset A_i.$$

- 4) a) Soient $j_1 < j_2 < \dots < j_p$. B_{j_1} concerne les lancers $k \times j_1 + 1$ à $(k+1)j_1$ qui précèdent strictement les lancers $k \times j_2 + 1$ à $(k+1)j_2$, et ainsi de suite. Donc, dans l'intersection, on considère kp lancers distincts.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in \{j_1, \dots, j_p\}} B_j\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{kp} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^p = \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_p\}} \mathbb{P}(B_j).$$

Les événements (B_j) sont mutuellement indépendants.

- b) Les événements $(\bar{B}_j)$ sont mutuellement indépendants. Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=i}^n \bar{B}_j\right) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^n.$$

- c) On en déduit donc (encore les lois de De Morgan)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=i}^n B_j\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=i}^n \bar{B}_j\right) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^n.$$

D'après le théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(C_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=i}^n B_j\right) = 1.$$

- 5) D'après la question 3), $C_i \subset A_i$. Donc $\mathbb{P}(A_i) = 1$. La question permet alors de conclure

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

Autrement dit,

s apparaît dans la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

Exercice 2

SOLUTION DU SUJET N° 37

SOURCE ESCP 2022

- (a) Par définition pour tout x réel, $x - 1 < [x] \leq x$. Ainsi $[x] \sim x$. Donc $[\sqrt{n}] \sim \sqrt{n}$.
- (b) On a $0 \leq \lambda_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$; donc $\sum \lambda_n$ converge par comparaison avec une série de RIEMANN convergente.
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(X_n \neq 0) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - e^{-\lambda_n}$ qui est équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ à λ_n car $\lambda_n \rightarrow 0$. Comme $\sum_{n \geq 1} \lambda_n$ converge, il est en de même pour $\sum_{n \geq 1} P(X_n \neq 0)$.
- (b) C'est quasiment du cours. Se démontre par récurrence.
- (c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$P\left(\bigcup_{n=N}^{N+p} [X_n \neq 0]\right) \leq \sum_{n=N}^{N+p} P(X_n \neq 0) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} P(X_n \neq 0)$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, le théorème de la limite monotone donne :

$$0 \leq P\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} [X_n \neq 0]\right) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} P(X_n \neq 0)$$

Enfin, on fait tendre N vers $+\infty$, le reste de la série convergente de terme général $P(X_n \neq 0)$ tend vers 0 et par suite, $P\left(\bigcup_{n \geq N} [X_n \neq 0]\right)$ aussi.

- (d) Pour tout N de $\mathbb{N}^*$, on pose $A_N = \bigcup_{n \geq N} [X_n \neq 0]$. La suite (A_N) est une suite décroissante d'événements, donc

$$0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(A_N) = P\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty} A_N\right) = P\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n \geq N} [X_n \neq 0]\right)$$

- (e) En passant au complémentaire, on a : $P\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geq N} [X_n = 0]\right) = 1$; ceci signifie que presque sûr il existe un rang à partir duquel la suite (X_n) est nulle et donc que presque sûrement, la $\sum_{n \geq 0} X_n$ converge.

Compléments

On suppose désormais que $B = \Omega$.

Ainsi la fonction $S = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ est définie sur Ω . On admet que c'est une variable aléatoire.

- Déterminer la limite en loi de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ avec $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
- Déterminer la limite en probabilité de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

3. Par indépendance, on sait que S_n suit la loi de POISSON de paramètre $\mu_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = \mu.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, et par continuité : $P(S_n = k) = e^{-\mu_n} \frac{\mu_n^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$, ce qui montre que S_n converge en loi vers la loi de POISSON de paramètre μ .

4. On a, par indépendance, pour $N > n$,

$$V(S_N - S_n) = \sum_{k=n+1}^N V(X_k) = \sum_{k=n+1}^N \lambda_k \rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k$$

On utilise l'inégalité de TCHEBICHEFF.

$$P(|S_N - S_n| > \varepsilon) \leq \frac{V(S_N - S_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$